Explorando Fluidos e Meios Contínuos

Vinícius Silva Franção

Instituto de Física - Universidade de São Paulo

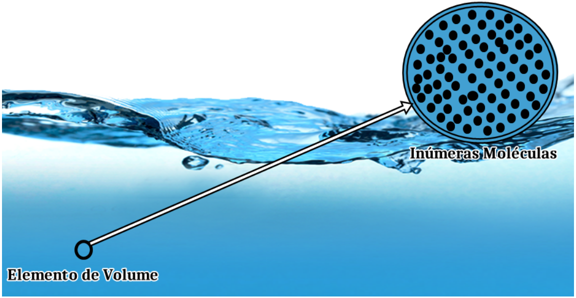
7 de novembro de 2018

Sumário

- Idealização de Meios Contínuos
- Construção da Equação de Euler
- Algumas Aplicações

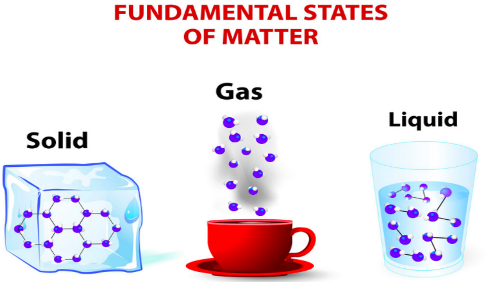
Meios Contínuos

- Meios Materiais;
- Elementos de volume $\rightarrow$ inúmeras partículas;
- Uso no tratamento de fluidos, eletrodinâmica, etc.

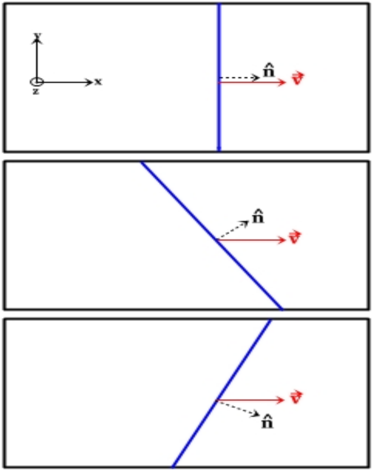


Por que usar modelagem de meios contínuos?

- Simplicidade no tratamento de modelos fluidos;
- Não precisamos saber qual o
- Dados experimentais comprovam validade do modelo;



Equação de Continuidade $\rightarrow$ Conservação



- S superfície (em azul)
- Δm quantidade de partículas que passam por ΔS em Δt

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\rho \Delta V}{\Delta t}$$

onde
$\rightarrow$ V é o volume e
$\rightarrow$ $\rho = \rho(\vec{r}, t) = \frac{dm}{dV}$

Meios Contínuos - Equação de Continuidade

$$\begin{aligned}\frac{\Delta m}{\Delta t} &= \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} \\ &= \frac{\rho \Delta S \Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{\rho \Delta S v_x \Delta t}{\Delta t} \\ &= \rho \Delta S (\vec{v} \cdot \hat{n})\end{aligned}$$

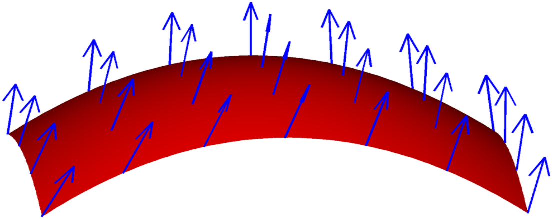
tomando elementos infinitesimais

$$\frac{dm}{dt} = \rho(\vec{v} \cdot \hat{n}) dS$$

$\rightarrow$ chamo $\rho \vec{v} \equiv \vec{J}$ vetor **densidade de corrente**, então

$$\frac{dm}{dt} = (\vec{J} \cdot \hat{n}) dS$$

Em uma superfície matematicamente aberta S qualquer

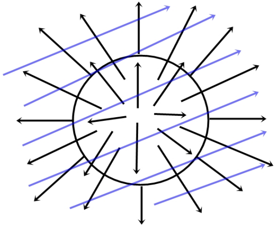


$$\left.\frac{\Delta m}{\Delta t}\right|_S = \sum_i (\vec{J}\cdot\hat{n}_i)\Delta S_i \underbrace{\Rightarrow}_{\Delta S_i \to 0} \left.\frac{dm}{dt}\right|_S = \int_S (\vec{J}\cdot\hat{n})dS$$

$\rightarrow$ chamo $\hat{n}dS = d\vec{S}$ de **elemento de superfície orientada** (pura notação), então

$$\frac{dm}{dt} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

Em uma superfície matematicamente fechada Σ qualquer, uso a notação



$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma}$$

Teorema da Divergência

$\rightarrow$ Seja $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ campo vetorial e seja Σ uma superfície matematicamente fechada. Então o fluxo desse campo através dessa superfície será dado por

$$\oint_{\Sigma} \vec{F} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{V} \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV$$

$\rightarrow$ onde V é volume dentro de Σ e $\vec{\nabla}\cdot$ é um operador diferencial chamado de divergente onde

$$\vec{\nabla} = \partial_x \hat{i} + \partial_y \hat{j} + \partial_z \hat{k}$$

Então

$$\left.\frac{dm}{dt}\right|_{\Sigma} = \oint_{\Sigma} \vec{J} \cdot d\vec{\Sigma} = \int_{V} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV$$

e essa é a taxa de quantidade de partículas m que **sai** por Σ. Por outro lado

$$m = \int_{V} \rho dV$$

então, a taxa de partículas que **entra** do elemento de volume é

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_{V} \rho dV = -\int_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Para termos conservação, precisamos que

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{N}^\circ \text{ de partículas que } \textbf{entra} \\ - \\ \text{N}^\circ \text{ de partículas que } \textbf{sai} \end{array} = 0}$$

Então

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} dV - \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \Rightarrow \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = 0 \rightarrow$$

Equação de Continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Movimento do Fluido

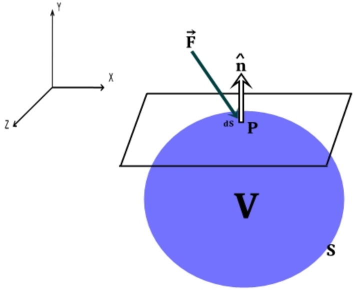
Considerações Iniciais:

- Fluido é **Incompressível**
- A velocidade depende da posição e do tempo de cada elemento de volume do fluido
- Utilizar tratamendo de meios contínuos

Forças atuantes no sistema

$$\vec{F} = \oint_S (-P + E)\hat{n} dS$$

- P pressão, E campos escalares externos



Teorema do Gradiente

$\rightarrow$ Seja $A = A(x, y, z)$ campo escalar suave e seja S uma superfície matematicamente fechada. Então

$$\oint_S A \cdot d\vec{\Sigma} = \int_V \vec{\nabla} A dV$$

$\rightarrow$ onde V é volume dentro de S e $\vec{\nabla}$ é um operador diferencial chamado de gradiente.

Dado o teorema do gradiente

$$\vec{F} = \oint_S (-P + E)\hat{n}dS = \int_V -\vec{\nabla}P + \vec{\nabla}EdV$$

Então as forças externas no movimento do fluido são dadas por

$$\vec{F} = \int_V -\vec{\nabla}P + \vec{\nabla}EdV$$

Derivada Material

$\rightarrow \vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t) \rightarrow \vec{r} = (x, y, z)$. Temos que a derivada total no tempo seja dada por

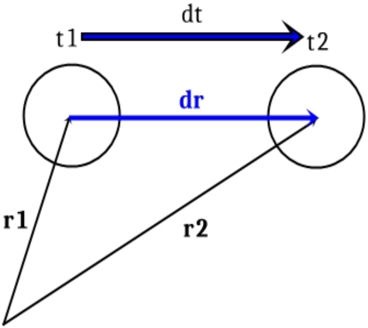
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\frac{dt}{dt}$$

onde $\frac{dt}{dt} = 1$. Tomarei como notação

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \equiv \frac{D\vec{v}}{Dt}$$

Movimento do Fluido



Movimento do Fluido

Temos que

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\vec{a} \\ &= \int_V \rho dV\vec{a} \\ &= \int_V \rho\vec{a}dV\end{aligned}$$

E concluímos

$$\int_V \rho\vec{a}dV = \int_V -\vec{\nabla}P + \vec{\nabla}EdV \Rightarrow$$

$$\rho\vec{a} = -\vec{\nabla}P + \vec{\nabla}E \Rightarrow \vec{a} = -\frac{\vec{\nabla}P}{\rho} + \frac{\vec{\nabla}E}{\rho}$$

Movimento do Fluido

Defino então $\frac{\vec{\nabla} E}{\rho} \equiv \vec{f}$ e, lembrando que $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt}$, chegamos que

Equação de Euler do Movimento do Fluido

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \vec{f}$$

Referências

Landau, L. D. & Lifshitz, E. M.. Fluid Mechanics. Second Edition (1987).