Quantização de Campos em Espaços-Tempos Curvos

Preliminar: O Oscilador Harmônico

Quantização do Oscilador Harmônico

Hamiltoniana: $H = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$

Relações de Comutação Canônicas: $[q, p] = iI$

Definimos operadores de aniquilação e criação:

$$a \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2}}q + \frac{i}{\sqrt{2m\omega}}P \text{ e } a^\dagger \equiv \sqrt{\frac{m\omega}{2}}q - \frac{i}{\sqrt{2m\omega}}P$$

com álgebra $[a, a^\dagger] = I$ e que satisfazem :

$$(1)\ H = \omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}I\right) \text{ e } (2)\ [a, H] = \omega a$$

Assim, na representação de Heisenberg, a evolução temporal de a fica

$$\frac{da_H(t)}{dt} = i\left[H, a_H(t)\right] = -\, i\omega a_H(t) \rightarrow a_H(t) = ae^{-i\omega t}$$

Logo

$$q_H(t) = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\left(ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}\right) \text{ e } p_H(t) = m\frac{dq_H(t)}{dt}$$

Quantização do Oscilador Harmônico

Ground State (Estado de Vácuo):

Estado $|0\rangle$ tal que $a|0\rangle = 0$

n-esimo estado excitado:

$$|n\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(a^\dagger\right)^n|0\rangle$$

Assim $H|n\rangle = E_n|n\rangle$, $E_n \equiv \omega\left(n + \frac{1}{2}\right), n \in \mathbb{Z}^+$

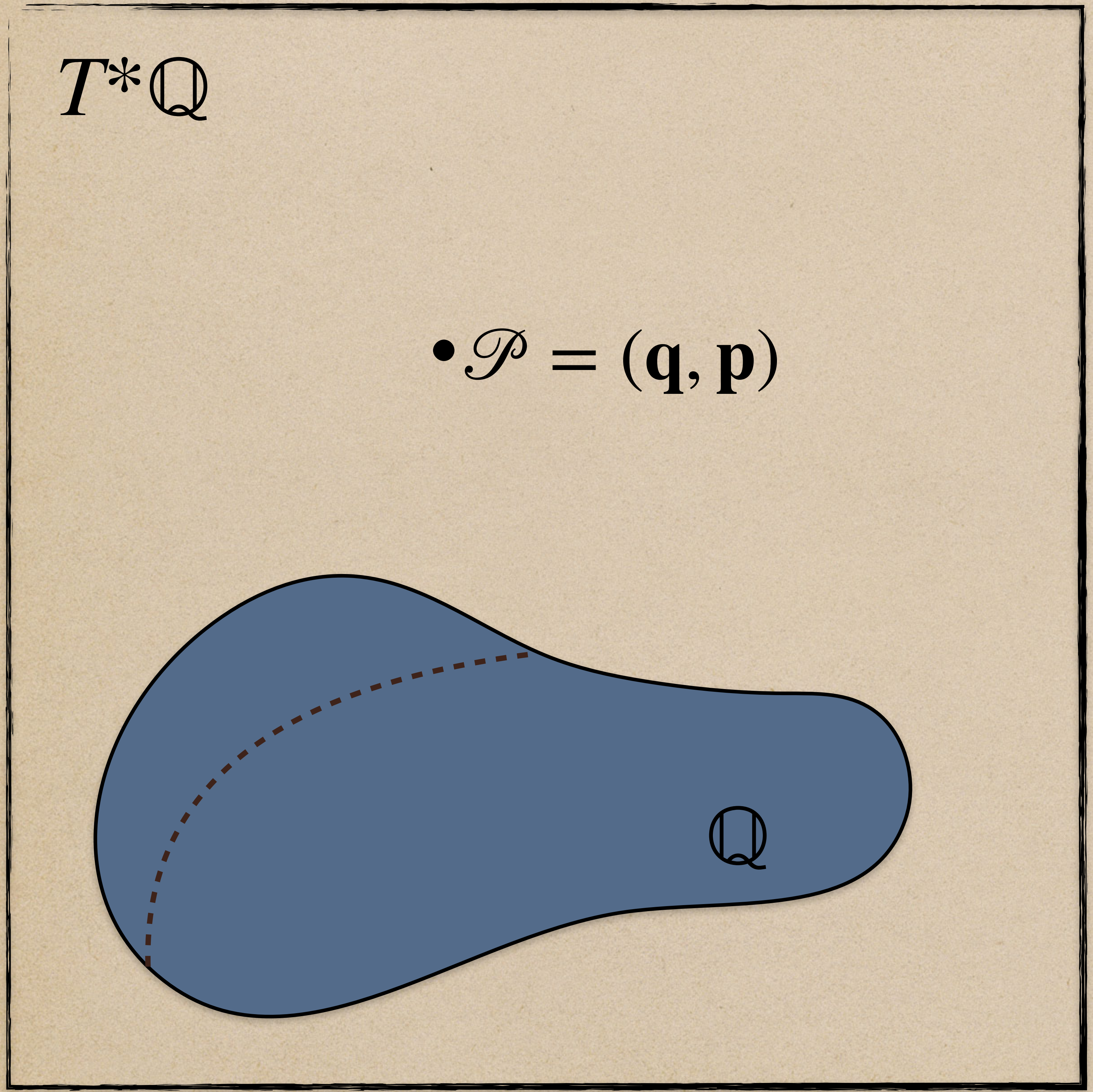
Espaço de Hilbert de estados do campo $\mathscr{H} \simeq L^2(\mathbb{R})$ (admite $\{|n\rangle\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ como base ortonormal)

Para N osciladores desacoplados, $\left[q_i, p_j\right] = i\delta_{ij}I$ (todos os outros comutadores se anulando), temos uma construção análoga à descrita acima para cada um deles resultando em um estado de vácuo $|0\rangle \equiv \otimes_{j=1}^N |0\rangle_j$ (com $a_j|0\rangle = 0, \forall j \in \{1, \cdots, N\}$), estados excitados

$|n_1, \cdots, n_N\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n_1!}}\left(a_1^\dagger\right)^{n_1} \cdots \frac{1}{\sqrt{n_N!}}\left(a_N^\dagger\right)^{n_N}|0\rangle$ e espaço de Hilbert total $\mathscr{H}_N \equiv \otimes_{j=1}^N \mathscr{H}_j$.

Espaço de Fase

<u>O Fibrado Cotangente</u>



$T^*\mathbb{Q} \equiv \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}, \mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q} \right\}$: Espaço 2n dimensional das "posições e momenta generalizados" do sistema

Sistema de coordenadas $\{q^\alpha\}$ em $\mathbb{Q}$ induz um sistema de coordenadas (chamado de canônico) em $T^*\mathbb{Q}$.

Dado $\mathscr{P} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in T^*\mathbb{Q}$ temos a representação coordenada:

$$\mathbf{q} \to \left(q^1, \cdots, q^n\right)$$

$$\mathbf{p} = \sum_\alpha p_\alpha \varepsilon_p^\alpha \equiv \sum_\alpha p_\alpha dq_p^\alpha \to (p_1, \cdots, p_n)$$

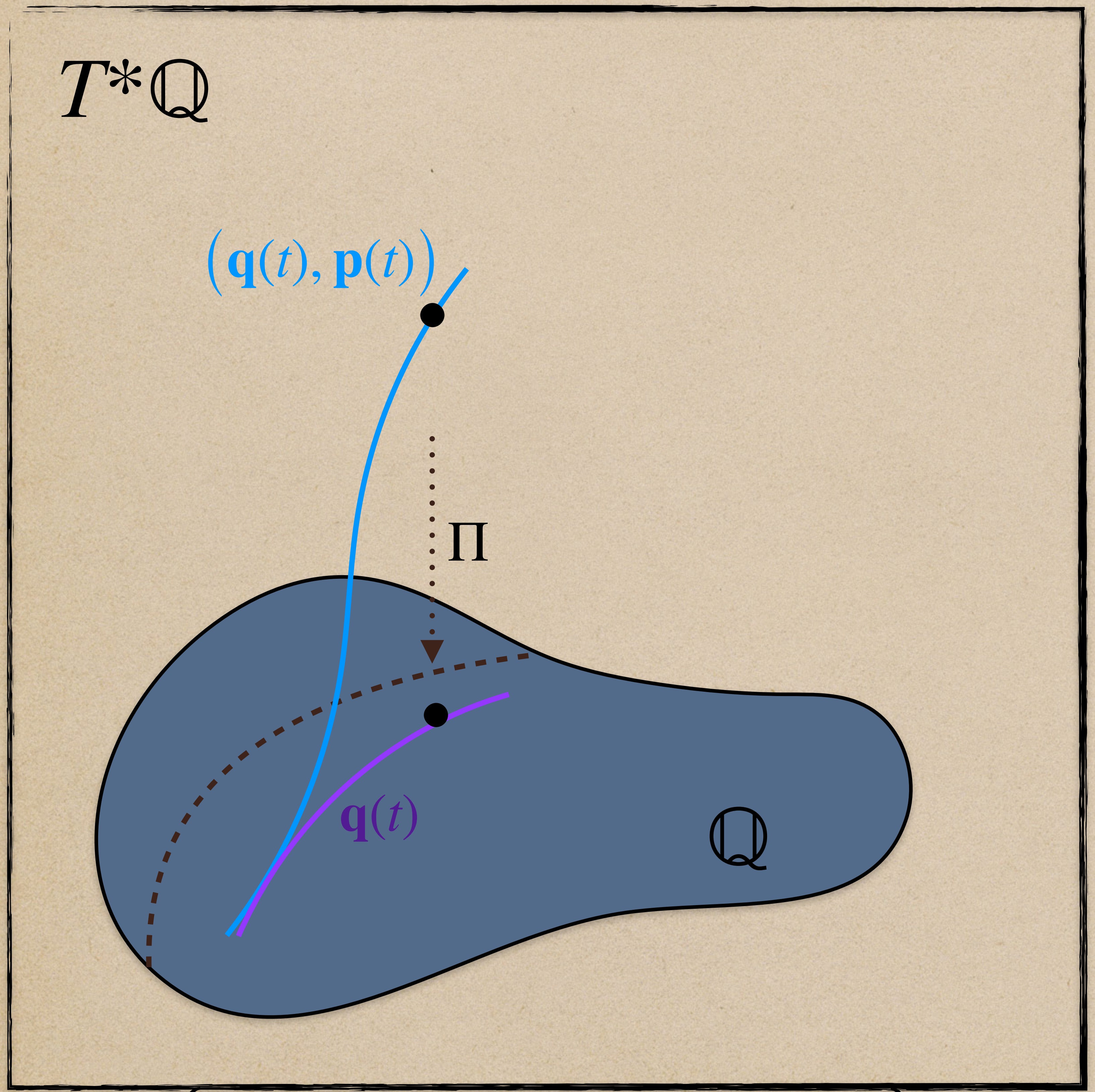
Assim: $\mathscr{P} \to (q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$

coordenadas de $\mathscr{P}$

<u>Obs.:</u> $T^*\mathbb{Q}$ define uma variedade (i.e. "superfície") 2n dimensional

Espaço de Fase

O Fibrado Cotangente



$T^*\mathbb{Q} \equiv \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}, \mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q} \right\}$: Espaço 2n dimensional das "posições e momenta generalizados" do sistema

A Hamiltoniana (dependente do tempo) é uma função escalar em $\mathbb{R} \times T^*\mathbb{Q}$, i.e., $H : \mathbb{R} \times T^*\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, que carrega toda a informação sobre o sistema dinâmico definido em $T^*\mathbb{Q}$

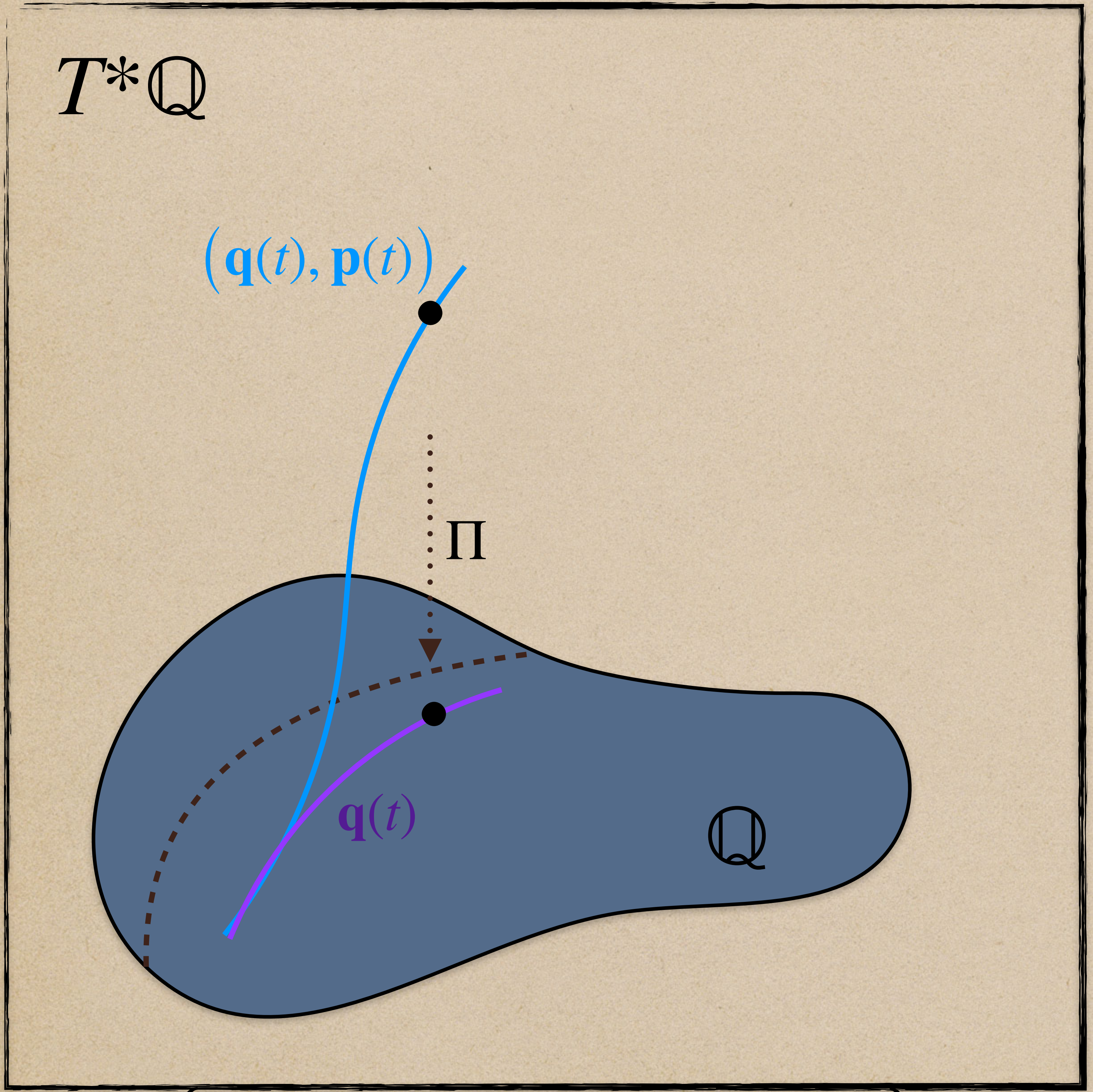
Equações de Hamilton:

$$\frac{dq^\alpha}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\alpha}$$

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^\alpha}$$

A Forma Ω

O Fibrado Cotangente



$T^*\mathbb{Q} \equiv \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}, \mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q} \right\}$: Espaço 2n dimensional das "posições e momenta generalizados" do sistema

Vamos definir uma notação para as coordenadas canônicas $T^*\mathbb{Q}$ de tal forma a tratar $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$ em pé de igualdade

$\xi^{J=\alpha} \equiv q^\alpha, \xi^{J=\alpha+n} \equiv p_\alpha, \alpha = 1,\cdots,n.$

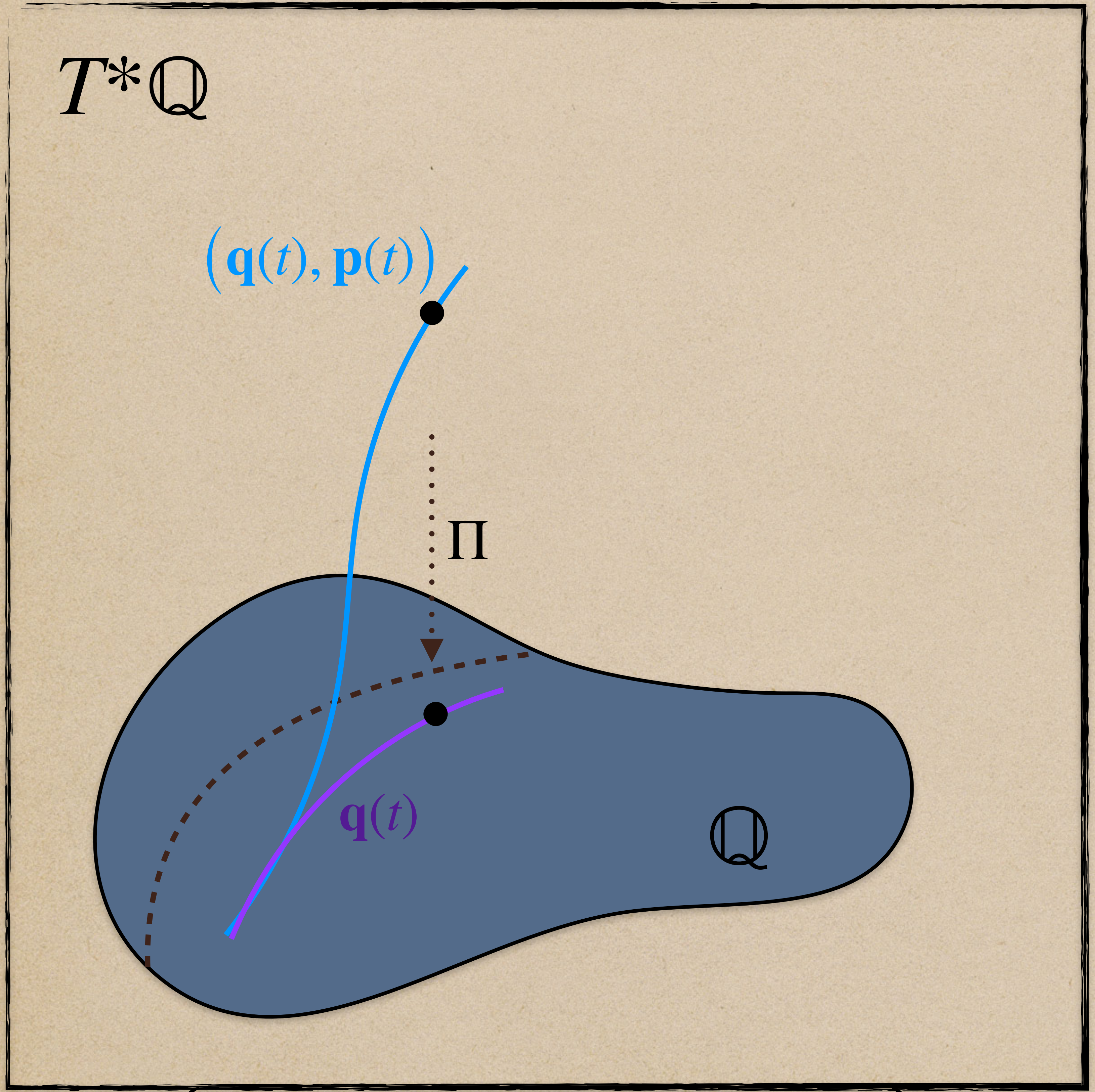
Sendo assim, temos $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e as equações de Hamilton ficam

$$\frac{d\xi^J}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi^{J+n}}, J = 1,\cdots,n$$

$$\frac{d\xi^J}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi^{J-n}}, J = n+1,\cdots,2n$$

A Forma Ω

O Fibrado Cotangente



$T^*\mathbb{Q} \equiv \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}, \mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q} \right\}$: Espaço 2n dimensional das "posições e momenta generalizados" do sistema

Vamos definir a matriz $\mathbf{\Omega}$:

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n, & \mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & 0 \end{bmatrix}$$

cujas componentes denotaremos por $\mathbf{\Omega}_{IJ}$, $I, J = 1, \cdots, 2n$.

Sua inversa é dada por

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n, & -\mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & 0 \end{bmatrix}$$

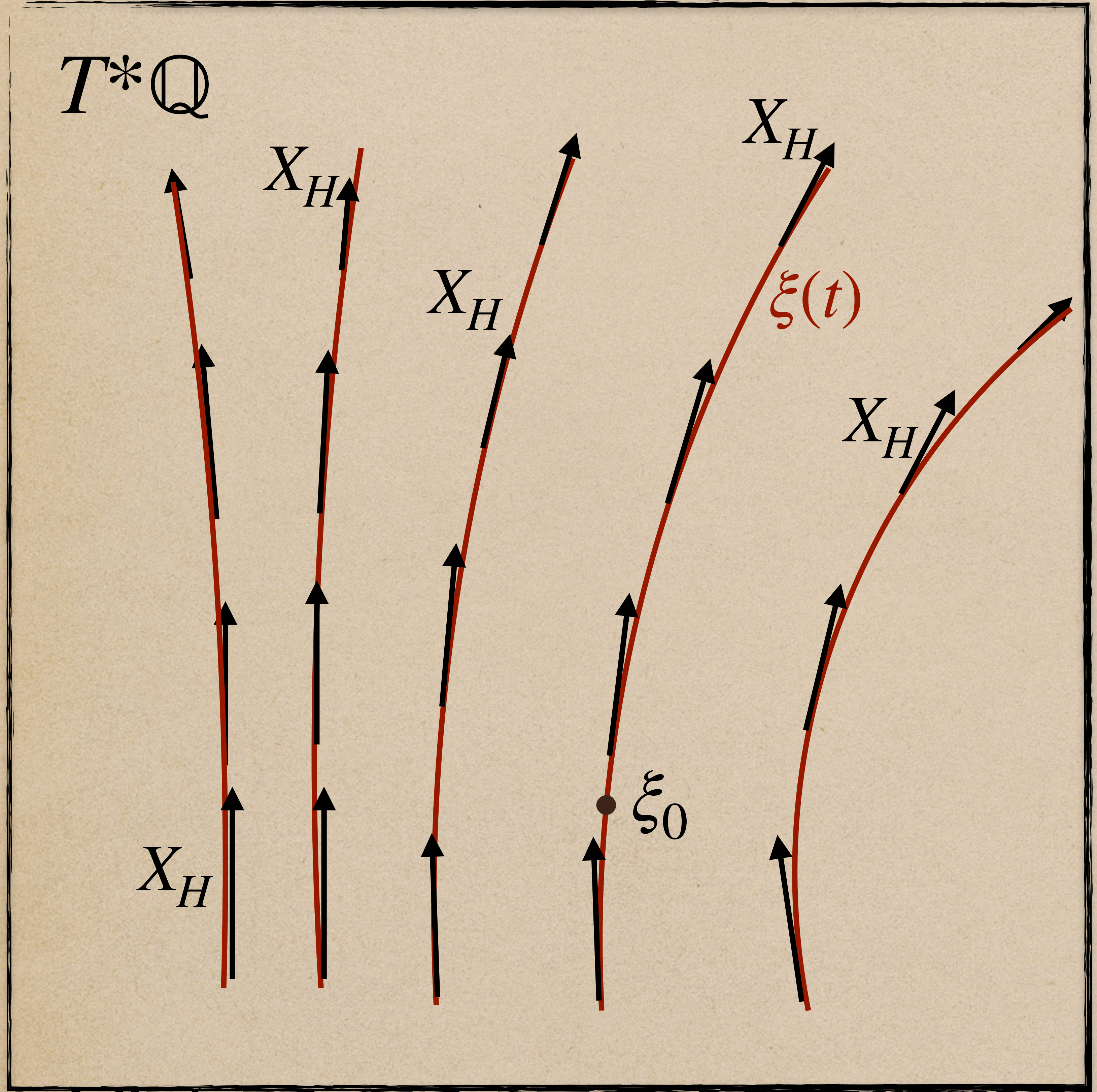
cujas componentes denotaremos por $\mathbf{\Omega}^{IJ}$, $I, J = 1, \cdots, 2n$. Sua inversa é dada por

Usando $\mathbf{\Omega}$, as equações de Hamilton ficam

$$\frac{d\xi^J}{dt} = \sum_{I=1}^{2n} \Omega^{IJ} \frac{\partial H}{\partial \xi^I}$$

O Campo Hamiltoniano X_H

O Fibrado Cotangente



$T^*\mathbb{Q} \equiv \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}, \mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q} \right\}$: Espaço 2n dimensional das "posições e momenta generalizados" do sistema

Olhando para o lado direito das equações de Hamilton, podemos definir o campo vetorial X_H em $T^*\mathbb{Q}$ cujas componentes são dadas por

$$X_H^J = \sum_{I=1}^{2n} \Omega^{IJ} \frac{\partial H}{\partial \xi^I}$$

Assim, as equações de Hamilton podem ser escritas como:

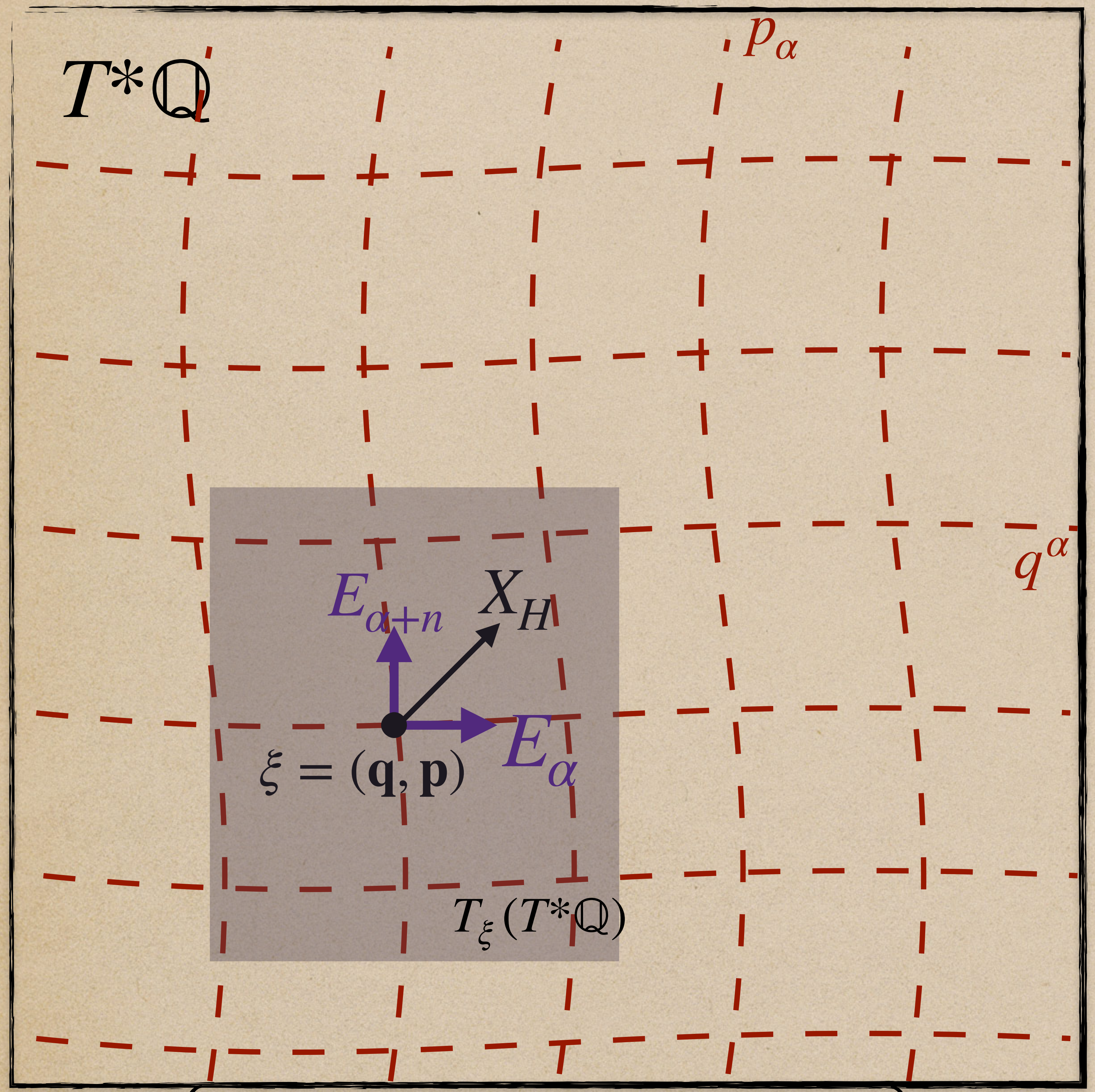
$$\frac{d\xi^J}{dt} = X_H^J\left(\xi(t)\right)$$

que, dado a condição inicial $\xi(t_0) = (\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0)$, admite solução única $\xi(t) = \big(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)\big)$

Vemos então que as soluções $\xi(t) = \big(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t)\big)$ das equações do movimento nada mais são do que as linhas de campo do campo Hamiltoniano X_H

O Campo Hamiltoniano X_H

O Fibrado Cotangente



$T^*\mathbb{Q} \equiv \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}, \mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q} \right\}$: Espaço 2n dimensional das "posições e momenta generalizados" do sistema

Algumas Observações Matemáticas:

O campo X_H é um capo vetorial sobre o espaço de fase $T^*\mathbb{Q}$, ou seja, em cada ponto $\xi \in T^*\mathbb{Q}$, X_H em ξ define um vetor tangente à $T^*\mathbb{Q}$ em ξ, i.e., $X_H(\xi) \in T_\xi(T^*\mathbb{Q})$, o espaço de vetores tangentes ao espaço de fase em ξ.

Nas coordenadas canônicas $\xi = (q^1, \cdots, p^n)$, temos (para cada ponto ξ) os vetores tangentes às coordenadas $\{\xi^J\}$: E_J [na notação de geometria $E_J = \dfrac{\partial}{\partial \xi^J}$, com $E_\alpha = \partial/\partial q^\alpha, E_{\alpha+n} = \partial/\partial p_\alpha$]. Os E_J' s formam uma base para $T_\xi(T^*\mathbb{Q})$.

Assim

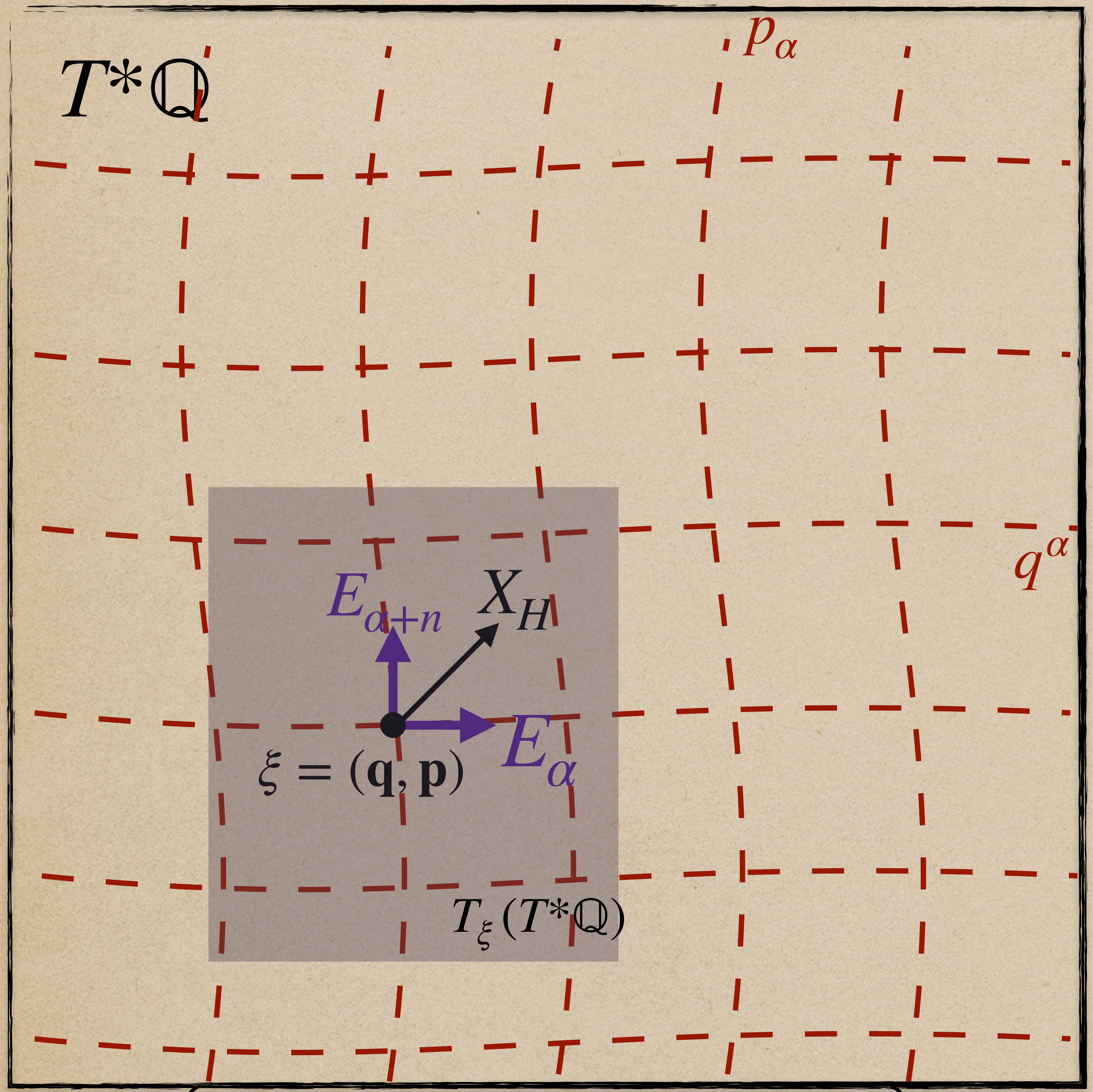
$$X_H = \sum_{J=1}^{2n} X_H^J E_J = \sum_{J=1}^{2n} X_H^J \frac{\partial}{\partial \xi^J}$$

com

$$X_H^J = \sum_{I=1}^{2n} \Omega^{IJ} \frac{\partial H}{\partial \xi^I}$$

O Campo Hamiltoniano X_H

O Fibrado Cotangente



$T^*\mathbb{Q} \equiv \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}, \mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q} \right\}$: Espaço 2n dimensional das "posições e momenta generalizados" do sistema

Algumas Observações Matemáticas:

Dado vetores X, Y tangentes ao espaço de fase em ξ [i.e., $X, Y \in T_\xi (T^*\mathbb{Q})$], podemos escreve-los como [fixado o sistema de coordenadas canônico]:

$$X = \sum_{J=1}^{2n} X^J E_J = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(X^{\alpha_q} E_\alpha + \tilde{X}^{\alpha_p} E_{\alpha+n} \right)$$

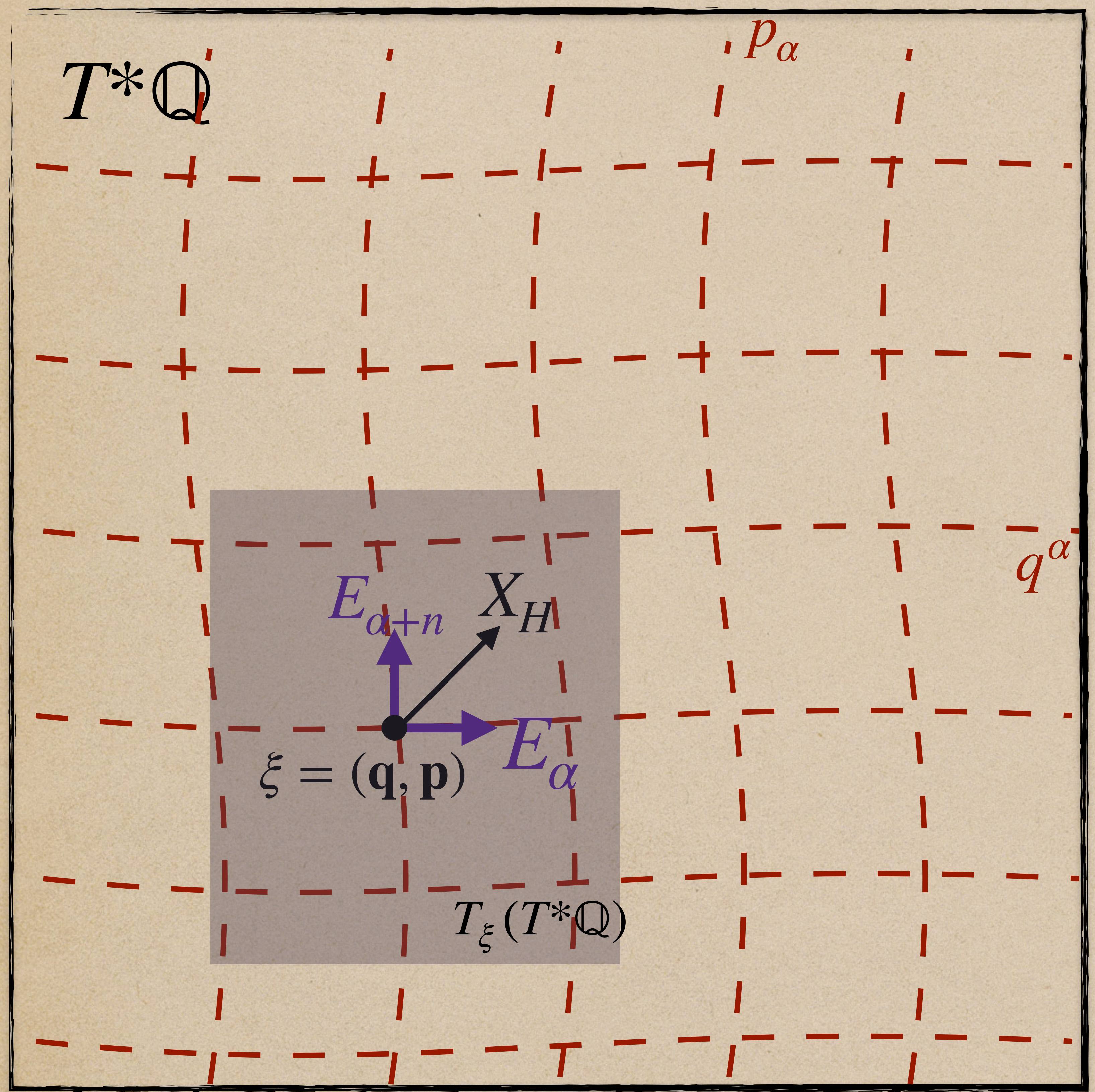
$$Y = \sum_{J=1}^{2n} Y^J E_J = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(Y^{\alpha_q} E_\alpha + \tilde{Y}^{\alpha_p} E_{\alpha+n} \right)$$

Assim, temos

$$\Omega (X, Y) \equiv \sum_{I,J=1}^{2n} \Omega_{IJ} X^I Y^J = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(X^{\alpha_q} \tilde{Y}^{\alpha_p} - \tilde{X}^{\alpha_p} Y^{\alpha_q} \right)$$

Os Colchetes de Poisson

O Fibrado Cotangente



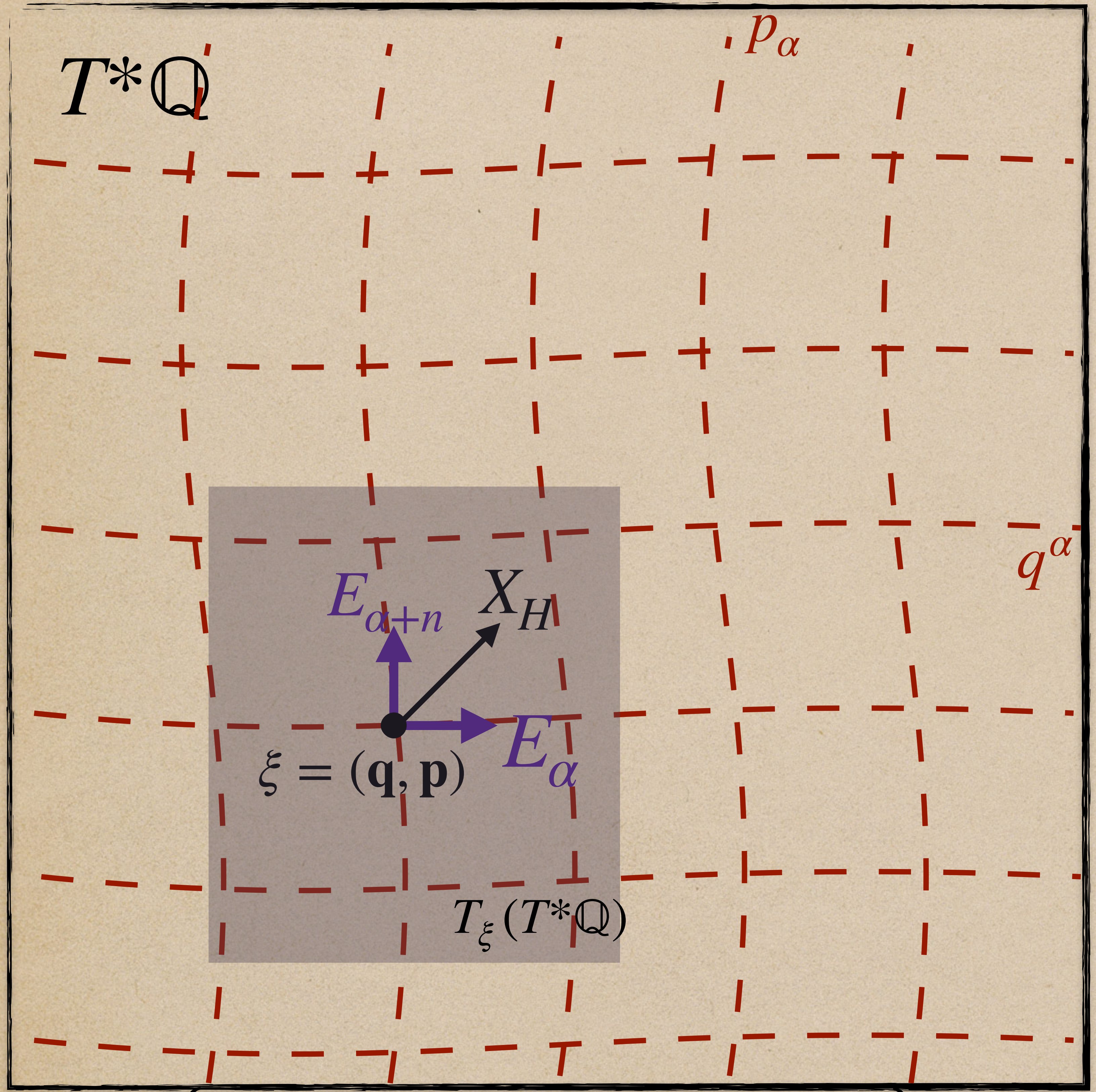
$T^*\mathbb{Q} \equiv \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}, \mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q} \right\}$: Espaço 2n dimensional das "posições e momenta generalizados" do sistema

---

Definição: Observáveis físicos (ou variáveis dinâmicas) são descritas por funções reais (suaves) no espaço de fase, ou seja, funções $f : T^*\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ [ou $f : \mathbb{R} \times T^*\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ no caso delas dependerem explicitamente do tempo].

Os Colchetes de Poisson

O Fibrado Cotangente



$T^*\mathbb{Q} \equiv \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}, \mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q} \right\}$: Espaço 2n dimensional das "posições e momenta generalizados" do sistema

Assim como a partir da Hamiltoniana $H : T^*\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ definimos o campo vetorial Hamiltoniano X_H, dado uma variável dinâmica $f : T^*\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ podemos definir o campo X_f cujas componentes (na base associada às coordenadas canônicas) são

$$X_f^J = \sum_{I=1}^{2n} \Omega^{IJ} \frac{\partial f}{\partial \xi^I}.$$

Em termos da base $\{E_J\}$ escrevemos:

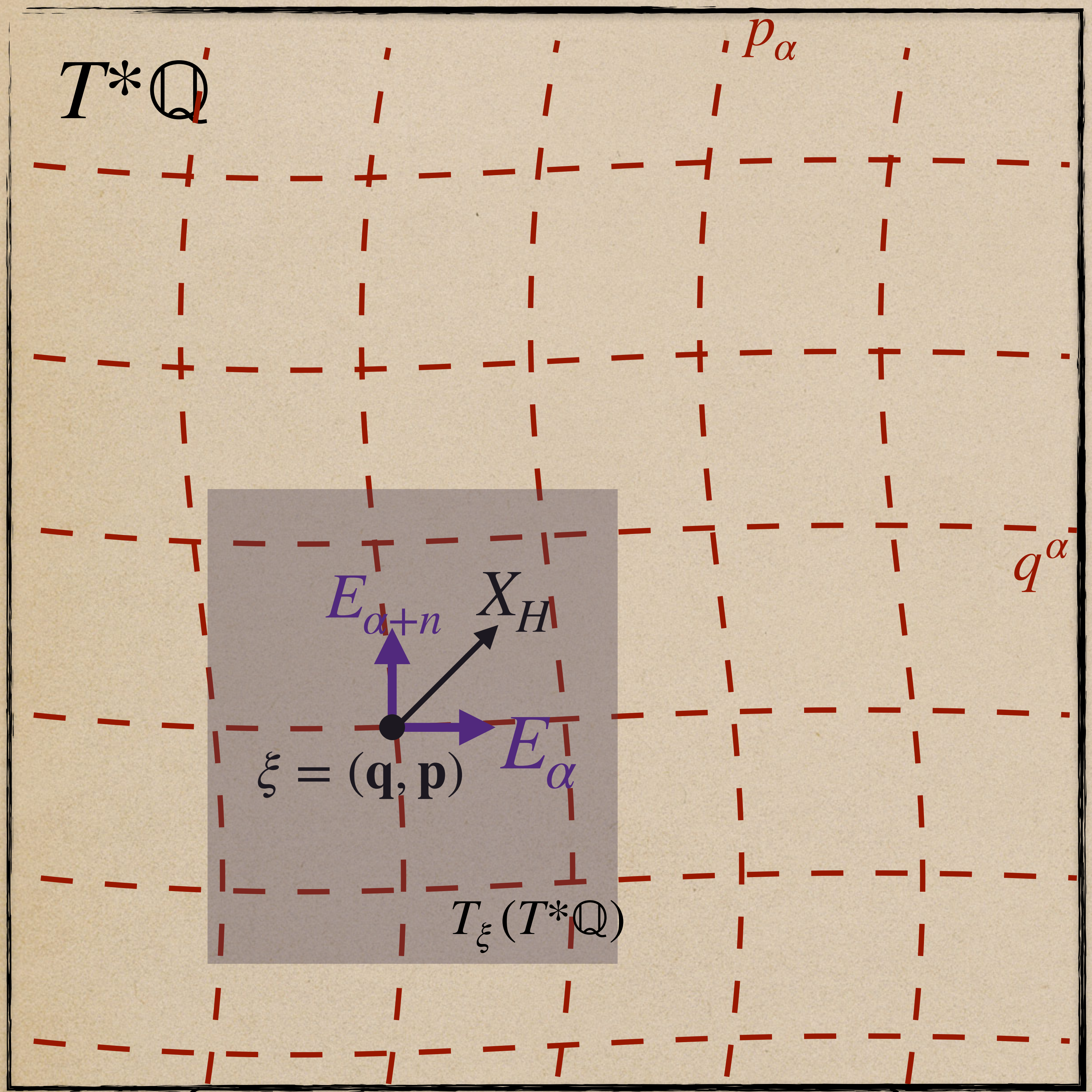
$$X_f = \sum_{J=1}^{2n} X_f^J E_J = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} E_\alpha - \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} E_{\alpha+n} \right)$$

[em particular, para a Hamiltoniana, temos:

$$X_H = \sum_{J=1}^{2n} X_H^J E_J = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} E_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q^\alpha} E_{\alpha+n} \right) \Bigg]$$

Os Colchetes de Poisson

O Fibrado Cotangente



$T^*\mathbb{Q} \equiv \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}, \mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q} \right\}$: Espaço 2n dimensional das "posições e momenta generalizados" do sistema

Definição: Dado dois observáveis físicos (ou variáveis dinâmicas) $f, g : T^*\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ [ou $f, g : \mathbb{R} \times T^*\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ no caso delas dependerem explicitamente do tempo], definimos seu Colchetes de Poisson como: $\{f, g\} \equiv \Omega\left(X_f, X_g\right)$

Em termos das coordenadas $\left\{\xi \leftrightarrow (q^1, \cdots, p_n)\right\}$ canônicas e base $\left\{E_J\right\}$ de vetores tangentes associados, temos

$$\{f, g\} \equiv \sum_{I,J=1}^{2n} \Omega_{IJ} X_f^I X_g^J = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q^\alpha}\frac{\partial g}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial f}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q^\alpha} \right)$$

Onde usamos que

$$X_f^J = \sum_{I=1}^{2n} \Omega^{IJ} \frac{\partial f}{\partial \xi^I}$$

$$X_f = \sum_{J=1}^{2n} X_f^J E_J = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_\alpha} E_\alpha - \frac{\partial f}{\partial q^\alpha} E_{\alpha+n} \right)$$

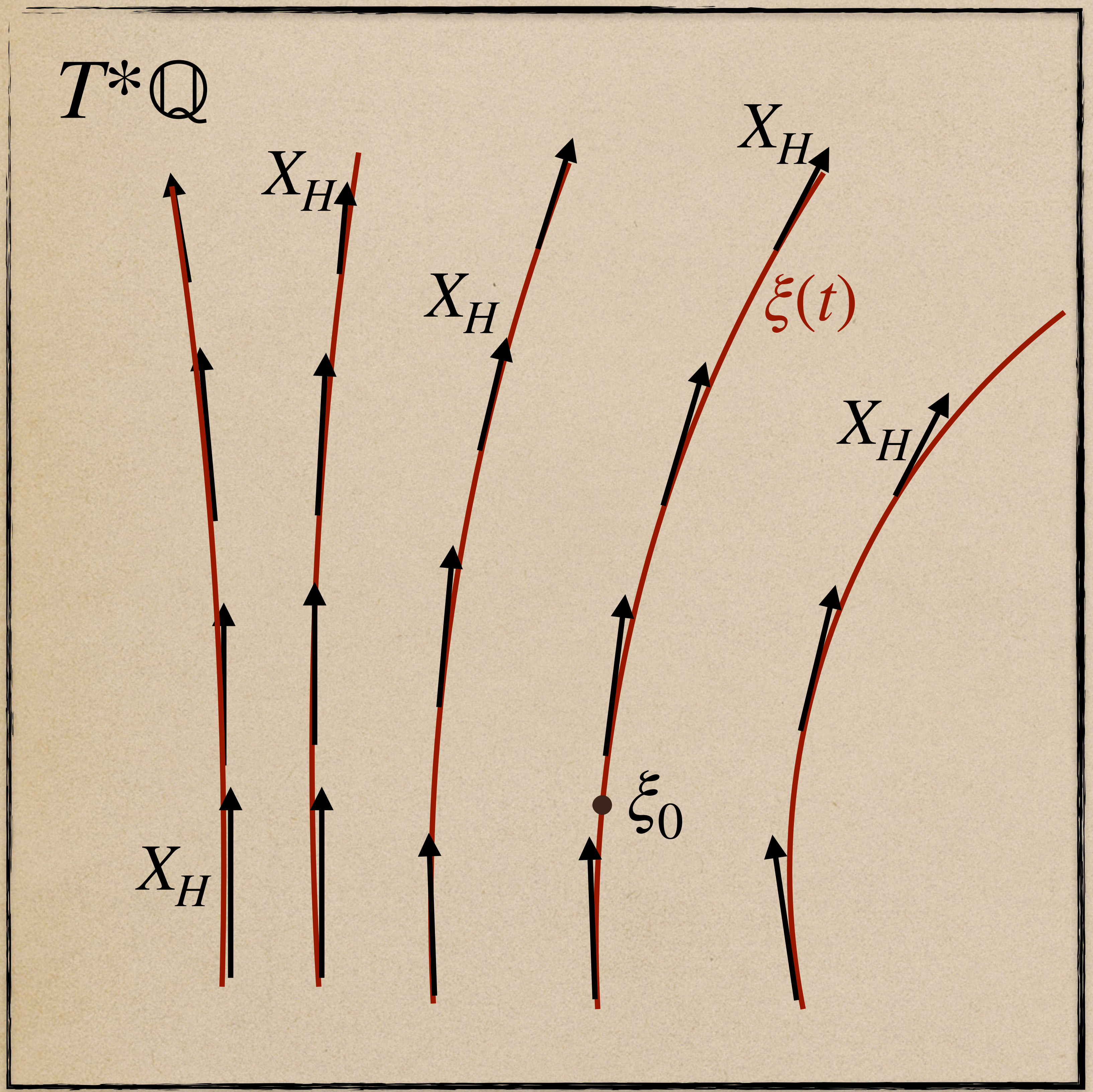
Os Colchetes de Poisson

<u>Propriedades dos $\{\cdot,\cdot\}$</u>

1. $\{f, g\} = -\{g, f\}$
2. $\{af + bg, h\} = a\{f, h\} + b\{g, h\}, a, b \in \mathbb{R}$
3. $\{q^\alpha, f\} = \dfrac{\partial f}{\partial p_\alpha}, \{p_\alpha, f\} = -\dfrac{\partial f}{\partial q^\alpha}, \alpha = 1, \cdots, n$
4. $\{q^\alpha, q^\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0, \{q^\alpha, p_\beta\} = \delta^\alpha_\beta, \alpha, \beta = 1, \cdots, n$
5. $\left\{f, \{g, h\}\right\} + \left\{g, \{h, f\}\right\} + \left\{h, \{f, g\}\right\} = 0$

Espaço de Soluções e a Forma Ω

O Fibrado Cotangente



$T^*\mathbb{Q} \equiv \left\{ (\mathbf{q}, \mathbf{p}) : \mathbf{q} \in \mathbb{Q}, \mathbf{p} \in T^*_{\mathbf{q}}\mathbb{Q} \right\}$:

Espaço 2n dimensional das "posições e momenta generalizados" do sistema

Suponha uma Hamiltoniana quadrática

$H = \dfrac{1}{2} \sum_{I,J} K_{IJ}(t)\xi^I \xi^J$, com $K_{IJ} = K_{JI}$.

Se $\xi_1(t) = \big(\mathbf{q}_1(t), \mathbf{p}_1(t)\big)$ e $\xi_2(t) = \big(\mathbf{q}_2(t), \mathbf{p}_2(t)\big)$ são duas soluções de

$\dfrac{d\xi^J}{dt} = X^J_H\left(\xi(t)\right)$, lembrando que $X^J_H = \sum_{I=1}^{2n} \Omega^{IJ} \dfrac{\partial H}{\partial \xi^I}$. Vemos então que

$\dfrac{d\xi^J}{dt} = \sum_{I,J'=1}^{2n} \Omega^{IJ} K_{IJ'} \xi^{J'}$ e, se $\mathfrak{s}(t) \equiv \Omega(\xi_1(t), \xi_2(t)) \equiv \sum_{I,J} \Omega_{IJ} \xi^I_1(t) \xi^J_2(t)$

temos

$$\frac{d\mathfrak{s}(t)}{dt} \equiv \Omega(\dot{\xi}_1(t), \xi_2(t)) + \Omega(\xi_1(t), \dot{\xi}_2(t)) = \sum_{I,J,J',L} \Omega_{IJ} \left(\Omega^{J'I} K_{J'L} \xi^L_1 \xi^J_2 + \Omega^{J'J} K_{J'L} \xi^L_2 \xi^I_1 \right)$$

Logo: $\dfrac{d\mathfrak{s}}{dt} = \sum_{I,J} K_{IJ} \xi^J_1 \xi^I_2 - \sum_{I,J} K_{IJ} \xi^I_1 \xi^J_2 = 0$

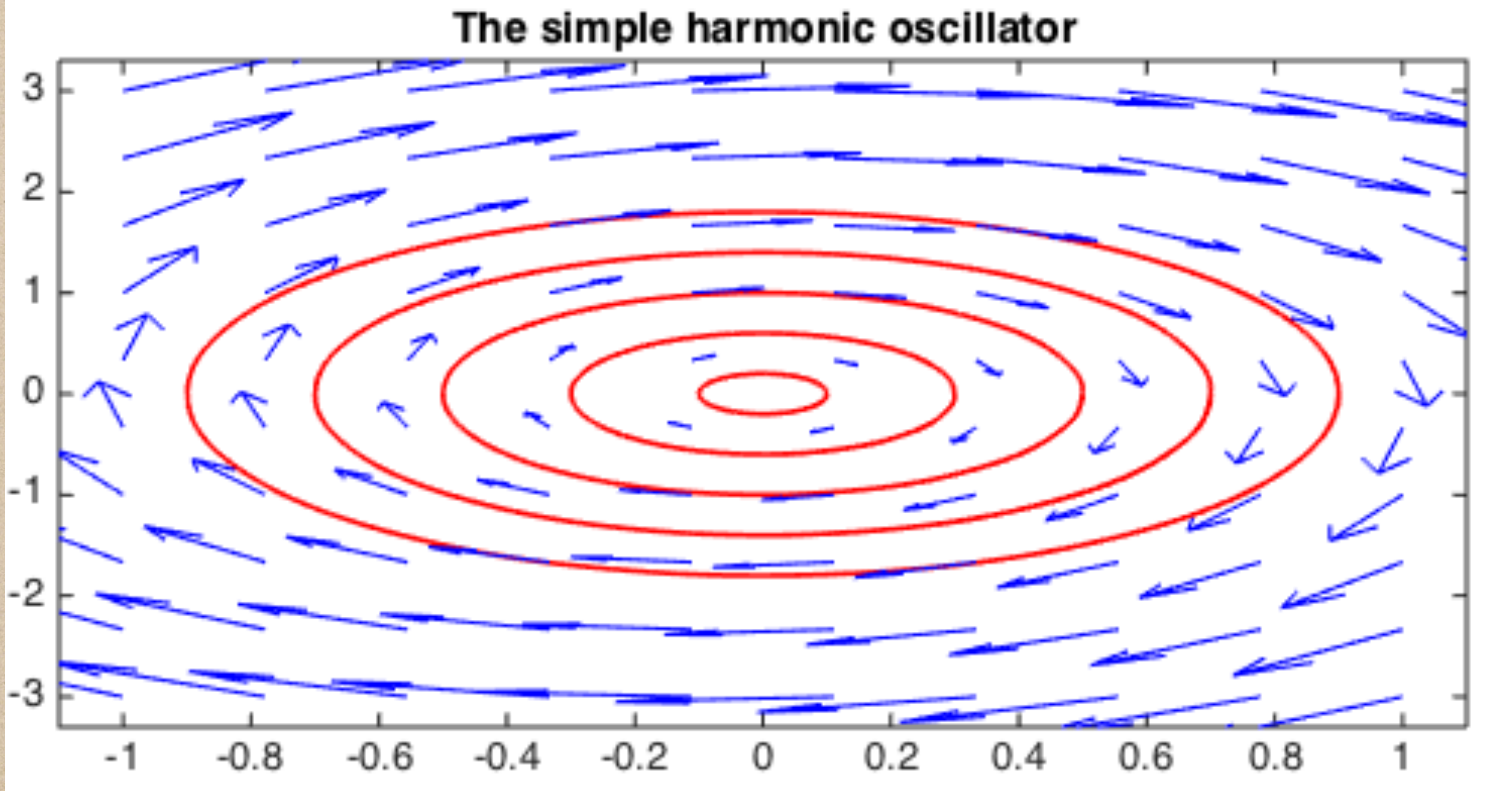
Assim $\mathfrak{s}(t) \equiv \Omega(\xi_1(t), \xi_2(t)) = \mathbf{cte}$, o que define uma forma simplética $\mathbf{\Omega}$ no espaço de soluções $\xi(t)$ das equações de Hamilton em $T^*\mathbb{Q}$, que denotaremos por $\mathcal{S}$

Quantização Alternativa do Oscilador Harmônico

A Forma Ω e o campo X_H:Oscilador Harmônico

Considere uma partícula de massa movendo-se em 1-D sob ação do potencial $V(q) = \dfrac{1}{2}m\omega^2 q^2$. A Hamiltoniana do sistema é dada por $H = \dfrac{p^2}{2m} + \dfrac{1}{2}m\omega^2 q^2$ [usando as coordenadas canônicas (q, p) em $T^*\mathbb{Q} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$]. Resolvendo as equações de Hamilton $\dfrac{d\xi^J}{dt} = \sum_{I=1}^{2n} \Omega^{IJ} \dfrac{\partial H}{\partial \xi^I}$ obtemos $\xi(t) = (q(t), p(t))$:

$$\begin{bmatrix} q(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(0)\cos(\omega t) + \frac{p(0)}{m\omega}\sin(\omega t) \\ p(0)\cos(\omega t) - m\omega q(0)\sin(\omega t) \end{bmatrix}$$



O campo Hamiltoniano X_H fica então

$$X_H = \Omega \cdot \frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{p}{m}\left(\frac{\partial}{\partial q}\right) - m\omega^2 q\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)$$

que é o campo vetorial cujas linhas de campo são as elipses descritas pelas soluções $\xi(t) = \big(q(t), p(t)\big)$.

Quantização Alternativa do Oscilador Harmônico

Note que, como podemos escrever sempre $p(t) = m\dot{q}(t)$, podemos identificar o espaço de soluções $\mathcal{S}$ do oscilador Harmônico com o espaço vetorial gerado pelas soluções

$$q(t) = \alpha \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}} + \bar{\alpha} \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}}, \text{ com } \alpha = \left[\sqrt{\frac{m\omega}{2}} q(0) + i \frac{p(0)}{\sqrt{2m\omega}}\right].$$

Como $\xi(t) = (q(t), p(t)) = (q(t), m\dot{q}(t))$, a ação da forma Ω em $\mathcal{S}$ é definida por

$$\Omega(q_1, q_2) \equiv \Omega(\xi_1, \xi_2) = m\left[q_1(t)\dot{q}_2(t) - q_2(t)\dot{q}_1(t)\right].$$

Ao complexificarmos $\mathcal{S}$, i.e., fazendo $\mathcal{S} \to \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ onde $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ é gerado por soluções da forma

$$q(t) = \alpha \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}} + \beta \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}},$$

definimos o chamado "produto interno" de Klein-Gordon $\langle \cdot , \cdot \rangle_{KG}$ em $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ usando a forma Ω como:

$$\langle q_1, q_2 \rangle_{KG} \equiv i\Omega(\bar{q}_1, q_2)$$

Quantização Alternativa do Oscilador Harmônico

Note, entretanto, que $\langle \cdot , \cdot \rangle_{KG}$ não é positivo-definido em $\mathscr{S}^{\mathbb{C}}$ (e portanto não define um produto interno de fato), já que $\langle q, q\rangle_{KG} \equiv i\Omega(\bar{q}, q) = |\alpha|^2 - |\beta|^2$.

Porém, vemos que podemos escrever:

(1) $\mathscr{S}^{\mathbb{C}} = \mathscr{H} \oplus \bar{\mathscr{H}}$, onde $\mathscr{H} \equiv \left\{ \alpha \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$.

(2) $\langle \cdot , \cdot \rangle_{KG}$ é positivo-definido em $\mathscr{H}$ tornando $\left(\mathscr{H}, \langle \cdot , \cdot \rangle_{KG}\right)$ um espaço de Hilbert .

(3) Dado $q^+ \in \mathscr{H}$ e $q^- \in \bar{\mathscr{H}}$, $\langle q^+, q^-\rangle_{KG} = 0$.

Para quantizar o oscilador, precisamos escolher quem será o espaço de Hilbert de estados do sistema, onde os observáveis do oscilador serão definidos como operadores auto-adjuntos (com particular interesse para o operador posição q). Tal espaço NÃO é $\mathscr{H}$, mas será construído a partir dele.

Digressão: Espaço de Fock de um espaço de Hilbert

Dado um espaço de Hilbert $\mathscr{H}$ definimos o espaço de Fock associado a ele como

$\mathfrak{F}_s\left(\mathscr{H}\right) \equiv \mathbb{C} \oplus \mathscr{H} \oplus \left(\mathscr{H} \otimes_s \mathscr{H}\right) \oplus \cdots = \mathbb{C} \oplus_{n=0}^{\infty} \left(\otimes_{s_{j=1}}^{n} \mathscr{H} \right)$: Descreve estados com número arbitrário (ou indeterminado) de "partículas" (ou excitações). [Observação: Se $\xi, \chi \in \mathscr{H}$, então $\xi \otimes_s \chi \equiv \dfrac{1}{2!}\left(\xi \otimes \chi + \chi \otimes \xi\right)$ e analogamente para os outros produtos tensoriais]

Assim, um vetor $\Psi \in \mathfrak{F}_s\left(\mathscr{H}\right)$ é da forma $\Psi \equiv \left(c^{\Psi}, \psi_1, \psi_2, \cdots\right)$ onde $\psi_j \in \otimes_{i=1}^{j} \mathscr{H}$ (e, portanto, se $\{e_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ é base ortonormal de $\mathscr{H}$ temos $\psi_j \equiv \sum_{\mu_1,\cdots,\mu_j} \alpha^{\mu_1\cdots\mu_j} e_{\mu_1} \otimes_s \cdots \otimes_s e_{\mu_j}$)

Se $\Psi \equiv \left(c^{\Psi}, \psi_1, \psi_2, \cdots\right)$ e $\Phi \equiv \left(c^{\Phi}, \phi_1, \phi_2, \cdots\right)$ então

$\langle \Psi, \Phi \rangle \equiv \bar{c}^{\Psi} c^{\Phi} + \langle \psi_1, \phi_1 \rangle_{\mathscr{H}} + \langle \psi_2, \phi_2 \rangle_{\mathscr{H}\otimes_s\mathscr{H}} + \cdots$ define um produto interno em $\mathfrak{F}_s\left(\mathscr{H}\right)$ o que o transforma em um espaço de Hilbert.

Vamos denotar a contração de um $\sigma \in \mathscr{H}$ com $\psi_j \in \otimes_{i=1}^{j} \mathscr{H}$ como $\bar{\sigma} \cdot \psi_j \equiv \langle \sigma, \psi_j \rangle_{\mathscr{H}} \in \otimes_{i=1}^{j-1} \mathscr{H}$ [Por exemplo, se $\psi_2 \equiv \sum_{\mu_1,\mu_2} \alpha^{\mu_1\mu_2} e_{\mu_1} \otimes_s e_{\mu_2}$ então $\bar{\sigma} \cdot \psi_2 = \sum_{\mu_1,\mu_2} \alpha^{\mu_1\mu_2} \langle \sigma, e_{\mu_1} \rangle_{\mathscr{H}} e_{\mu_2}$]

Digressão: Espaço de Fock de um espaço de Hilbert

Podemos definir operadores criação, $a^\dagger(\chi)$, e aniquilação, $a(\bar{\sigma})$, de modos/estados $\sigma, \chi \in \mathscr{H}$ por:

$a^\dagger(\chi)\Psi \equiv \left(0, c^\Psi \chi, \sqrt{2}\chi \otimes_s \psi_1, \sqrt{3}\chi \otimes_s \psi_2, \cdots\right)$ e $a(\bar{\sigma})\Psi \equiv \left(\langle \sigma, \psi_1 \rangle_{\mathscr{H}}, \sqrt{2}\bar{\sigma} \cdot \psi_2, \sqrt{3}\bar{\sigma} \cdot \psi_3, \cdots\right)$.

Com tais definições vemos que

(1) $\left[a(\bar{\sigma}), a(\bar{\tau})\right] = 0$

(2) $\left[a^\dagger(\chi), a^\dagger(\xi)\right] = 0$

(3) $\left[a(\bar{\sigma}), a^\dagger(\chi)\right] = \langle \sigma, \chi \rangle_{\mathscr{H}} I$

Como exemplo, vamos provar (3) [(1) e (2) fica como exercício!].

$$a(\bar{\sigma})a^\dagger(\chi)\Psi = a(\bar{\sigma})\left(0, c^\Psi \chi, \sqrt{2}\chi \otimes_s \psi_1, \sqrt{3}\chi \otimes_s \psi_2, \cdots\right) = \left(c^\Psi \langle \sigma, \chi \rangle_{\mathscr{H}}, 2\bar{\sigma} \cdot (\chi \otimes_s \psi_1), 3\bar{\sigma} \cdot (\chi \otimes_s \psi_2), \cdots\right)$$

Usando que $2\chi \otimes_s \psi_1 \equiv \left(\chi \otimes \psi_1 + \psi_1 \otimes \chi\right)$ temos $2\sigma \cdot (\chi \otimes_s \psi_1) = \langle \sigma, \chi \rangle_{\mathscr{H}} \psi_1 + \langle \sigma, \psi_1 \rangle_{\mathscr{H}} \chi$. Analogamente, mostra-se que $3\bar{\sigma} \cdot (\chi \otimes_s \psi_2) = \langle \sigma, \chi \rangle_{\mathscr{H}} \psi_2 + 2(\bar{\sigma} \cdot \psi_2) \otimes_s \chi$ e assim por diante.

Com isso encontramos

$$a(\bar{\sigma})a^\dagger(\chi)\Psi = \left(c^\Psi \langle \sigma, \chi \rangle_{\mathscr{H}}, \langle \sigma, \chi \rangle_{\mathscr{H}} \psi_1 + \langle \sigma, \psi_1 \rangle_{\mathscr{H}} \chi, \langle \sigma, \chi \rangle_{\mathscr{H}} \psi_2 + 2(\bar{\sigma} \cdot \psi_2) \otimes_s \chi, \cdots\right)$$

Digressão: Espaço de Fock de um espaço de Hilbert

Analogamente mostra-se que

$$a^\dagger(\chi)a(\bar{\sigma})\Psi = a^\dagger(\chi)\Big(\langle\sigma,\psi_1\rangle_{\mathscr{H}}, \sqrt{2}\bar{\sigma}\cdot\psi_2, \sqrt{3}\bar{\sigma}\cdot\psi_3, \cdots\Big) = \big(0, \langle\sigma,\psi_1\rangle_{\mathscr{H}}\chi, 2(\bar{\sigma}\cdot\psi_2)\otimes_s\chi, \cdots\big)$$

Como

$$a(\bar{\sigma})a^\dagger(\chi)\Psi = \big(c^\Psi\langle\sigma,\chi\rangle_{\mathscr{H}}, \langle\sigma,\chi\rangle_{\mathscr{H}}\psi_1 + \langle\sigma,\psi_1\rangle_{\mathscr{H}}\chi, \langle\sigma,\chi\rangle_{\mathscr{H}}\psi_2 + 2(\bar{\sigma}\cdot\psi_2)\otimes_s\chi, \cdots\big)$$

temos

$$\big[a(\bar{\sigma}), a^\dagger(\chi)\big]\,\Psi = \langle\sigma,\chi\rangle_{\mathscr{H}}\big(c^\Psi, \psi_1, \psi_2, \cdots\big) = \langle\sigma,\chi\rangle_{\mathscr{H}}\Psi$$

o que demonstra a relação de comutação entre $a(\bar{\sigma})$ e $a^\dagger(\chi)$.

Note que se $\{e_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ é base ortonormal de $\mathscr{H}$ temos

$$\Big[a(\bar{e}_\mu), a^\dagger(e_\nu)\Big]\,\Psi = \langle e_\mu, e_\nu\rangle_{\mathscr{H}} I = \delta_{\mu\nu} I.$$ (assim $a\left(\bar{e}_\mu\right) \leftrightarrow a_\mu$, $a^\dagger\left(e_\mu\right) \leftrightarrow a_\mu^\dagger$)

Assim, temos $\Psi_0 \equiv |0\rangle = (1,0,0\cdots) \in \mathfrak{F}_s\left(\mathscr{H}\right)$ que satisfaz $a(\bar{\sigma})\,|0\rangle = 0, \forall\sigma\in\mathscr{H}$ (estado de vácuo).

$$|1_1^{\chi_1}, \cdots, 1_N^{\chi_N}\rangle \equiv \big(a^\dagger(\chi_1)\big)^{n_1}\cdots\big(a^\dagger(\chi_N)\big)^{n_N}|0\rangle = \big(0,\cdots,0,\chi_1\otimes_s\cdots\otimes_s\chi_N, 0,\cdots\big)$$

$$|n_1^{\chi_1}, \cdots, n_N^{\chi_N}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n_1!}}\big(a^\dagger(\chi_1)\big)^{n_1}\cdots\frac{1}{\sqrt{n_N!}}\big(a^\dagger(\chi_N)\big)^{n_N}|0\rangle = \Big(0,\cdots,0,\Big(\otimes_{s1}^{n_1}\chi_1\Big)\otimes_s\cdots\otimes_s, 0,\cdots\Big(\otimes_{s1}^{n_N}\chi_N\Big)\Big)$$

Quantização Alternativa do Oscilador Harmônico

Podemos escrever:

(1) $\mathcal{S}^{\mathbb{C}} = \mathcal{H} \oplus \bar{\mathcal{H}}$, onde $\mathcal{H} \equiv \left\{ \alpha \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t} : \alpha \in \mathbb{C} \right\}$.

(2) $\langle \cdot , \cdot \rangle_{KG}$ é positivo-definido em $\mathcal{H}$ tornando $\left(\mathcal{H}, \langle \cdot , \cdot \rangle_{KG} \right)$ um espaço de Hilbert .

(3) Dado $q^{+} \in \mathcal{H}$ e $q^{-} \in \bar{\mathcal{H}}$, $\langle q^{+}, q^{-} \rangle_{KG} = 0$.

Para quantizar o oscilador, usamos $\mathcal{H}$ como nosso espaço de "1-partícula" e definimos como espaço de estados o espaço de Fock $\mathfrak{F}_s \left(\mathcal{H} \right)$.

Os operadores de (Heisenberg) de posição e momento são definidos por

$q_H(t) = u(t)_\omega a(\bar{u}_\omega) + \bar{u}(t)_\omega a^{\dagger}(u_\omega)$ e $p_H(t) = m\dot{q}_H(t)$,

respectivamente, onde $u \equiv \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} e^{-i\omega t}$ e temos que $\langle u_\omega, u_\omega \rangle_{KG} \equiv i\Omega(\bar{u}_\omega, u_\omega) = 1$.

Quantização Alternativa do Oscilador Harmônico

Vamos definir $K : \mathcal{S}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}$ como o operador que pega soluções arbitrárias do oscilador e projeta em sua ``parte de frequência positiva" (ou norma positiva). Assim, se $q(t) = \alpha u_\omega(t) + \beta \bar{u}_\omega(t)$, temos que

$Kq \equiv \alpha u_\omega = \langle u_\omega, q \rangle u_\omega,$

onde usamos $\langle u_\omega, u_\omega \rangle_{KG} = 1$ e $\langle u_\omega, \bar{u}_\omega \rangle_{KG} = 0$ (propriedade 3) para escrever $\alpha = \langle u_\omega, q \rangle_{KG}$.

Analogamente, definimos $\bar{K} : \mathcal{S}^{\mathbb{C}} \to \bar{\mathcal{H}}$ (que toma a parte de norma, ou frequência, negativa da solução q) por $\bar{K}q \equiv \overline{Kq} \equiv \beta \bar{u}_\omega$, com $\beta = -\langle \bar{u}_\omega, q \rangle_{KG}$.

N Osciladores Harmônicos Desacoplados

Quando temos N osciladores desacoplados, o espaço de fase é $T^*\mathbb{Q}$ com $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^N$. Assim, em coordenadas canônicas em $T^*\mathbb{Q}$ temos que um dado $\xi \in T^*\mathbb{Q}$ é da forma $\xi = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \equiv (q^1, \cdots, q^N, p_1, \cdots, p_N)$ e a Hamiltoniana do sistema pode ser escrita como

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{p_j^2}{2m_j} + \frac{1}{2} m_j \omega_j^2 q_j^2 \right].$$

Como eles estão desacoplados, cada um deles têm solução

$$q_j(t) = q^j(0)\cos(\omega_j t) + \frac{p_j(0)}{m\omega_j}\sin(\omega_j t) = \alpha_j \frac{e^{-i\omega_j t}}{\sqrt{2m_j\omega_j}} + \bar{\alpha}_j \frac{e^{i\omega_j t}}{\sqrt{2m_j\omega_j}}, \text{ com } \alpha_j = \left[\sqrt{\frac{m_j\omega_j}{2}} q^j(0) + i\frac{p_j(0)}{\sqrt{2m_j\omega_j}} \right] \text{ e}$$

$$p_j = m_j \dot{q}^j(t)$$

e, assim, uma solução arbitrária do oscilador é da forma $\mathbf{q} = \sum \left[\alpha_j \mathbf{u}_{\omega_j} + \bar{\alpha}_j \bar{\mathbf{u}}_{\omega_j} \right]$ com $\mathbf{u}_{\omega_j} \equiv \left(0, \cdots, 0, \frac{e^{-i\omega_j t}}{\sqrt{2m_j\omega_j}} 0, \cdots, 0 \right)$

N Osciladores Harmônicos Desacoplados

O espaço de soluções $\mathscr{S}$ tem definida a forma simplética $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = -\sum_j m_j \left[q_2^j \dot{q}_1^j - q_1^j \dot{q}_2^j \right]$ a partir da qual definimos o produto interno de Klein-Gordon $\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle_{KG} = i\Omega\left(\bar{\mathbf{q}}_1, \mathbf{q}_2\right)$. Assim como no caso 1-dimensional, temos que a complexificação $\mathscr{S}^{\mathbb{C}}$ de $\mathscr{S}$ satisfaz

(1) $\mathscr{S}^{\mathbb{C}} = \mathscr{H} \oplus \bar{\mathscr{H}}$, onde $\mathscr{H} \equiv \left\{ \sum \alpha_j \mathbf{u}_{\omega_j} : \alpha_1, \cdots, \alpha_N \in \mathbb{C} \right\}$.

(2) $\langle \cdot , \cdot \rangle_{KG}$ é positivo-definido em $\mathscr{H}$ tornando $\left(\mathscr{H}, \langle \cdot , \cdot \rangle_{KG}\right)$ um espaço de Hilbert .

(3) Dado $\mathbf{q}^+ \in \mathscr{H}$ e $\mathbf{q}^- \in \bar{\mathscr{H}}$, $\langle \mathbf{q}^+, \mathbf{q}^- \rangle_{KG} = 0$.

Note que os $\left\{ \mathbf{u}_{\omega_j} \equiv \left(0, \cdots, 0, \frac{e^{-i\omega_j t}}{\sqrt{2m_j\omega_j}} 0, \cdots, 0 \right) : j = 1, \cdots, N \right\}$ satisfazem $\langle \mathbf{u}_{\omega_i}, \mathbf{u}_{\omega_j} \rangle_{KG} = \delta_{ij}$ e, com isso, formam uma base ortonormal para $\left(\mathscr{H}, \langle \cdot , \cdot \rangle_{KG}\right)$

N Osciladores Harmônicos Desacoplados

Para quantizar o oscilador, usamos $\mathscr{H}$ como nosso espaço de "1-partícula" e definimos como espaço de estados o espaço de Fock $\mathfrak{F}_s\left(\mathscr{H}\right) \equiv \mathbb{C} \oplus_n \left(\otimes_{s_{j=1}}^{n} \mathscr{H} \right)$. O operador de (Heisenberg) de posição é definido por

$$q_H(\tau) = \sum_j \left[\mathbf{u}_{\omega_j}(t) a(\bar{\mathbf{u}}_{\omega_j}) + \bar{\mathbf{u}}_{\omega_j}(t) a^{\dagger}(\mathbf{u}_{\omega_j}) \right]$$

onde $\left\{ \mathbf{u}_{\omega_j} \equiv \left(0,\cdots,0,\frac{e^{-i\omega_j(t-\tau)}}{\sqrt{2m_j\omega_j}}0,\cdots,0 \right) : j = 1,\cdots,N \right\}$ e $\langle \mathbf{u}_{\omega_i}, \mathbf{u}_{\omega_j} \rangle_{KG} = \delta_{ij}$.

Se $K : \mathscr{S}^{\mathbb{C}} \to \mathscr{H}$ é o projetor que pega soluções arbitrárias do oscilador e projeta em sua ``parte de frequência positiva" (ou norma positiva), i.e., se $\mathbf{q}(t) = \sum_j \left[\alpha_j \mathbf{u}_{\omega_j}(t) + \beta_j \bar{\mathbf{u}}_{\omega_j}(t) \right]$, temos $K\mathbf{q} = \sum_j \alpha_j \mathbf{u}_{\omega_j}$, $\alpha_j = \langle \mathbf{u}^{\tau}_{\omega_j}, \mathbf{q} \rangle_{KG}$. Além disso , $\overline{K\mathbf{q}} = \sum_j \beta_j \bar{\mathbf{u}}_{\omega_j}$ com $\beta_j = -\langle \bar{\mathbf{u}}_{\omega_j}, \mathbf{q} \rangle_{KG}$.

N Osciladores Harmônicos Desacoplados

Observação: Apesar das quantizações $\left(\mathscr{H}_N \equiv \otimes_{j=1}^{N} L^2(\mathbb{R}), q^j, p_j\right)$ e $\left(\mathfrak{F}_s\left(\mathscr{H}\right), \mathbf{q}_H, \mathbf{p}_H\right)$ aparentemente serem bem diferentes, elas são equivalentes devido ao teorema de Stone-Von Neumann. No entanto, a versão via espaço de Fock usando o espaço de fase clássico é muito mais útil para ser aplicada em campos quânticos.

Quantização de N Osciladores Harmônicos Desacoplados

Resumo

Dado o espaço de fase clássico $(\mathcal{S}, \Omega)$, com $\Omega(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) = -\sum_j m_j \left[q_2^j \dot{\bar{q}}_1^j - q_1^j \dot{\bar{q}}_2^j\right]$, fazemos a complexificação $\mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ de $\mathcal{S}$, definimos o produto interno de Klein-Gordon $\langle \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle_{KG} = i\Omega\left(\bar{\mathbf{q}}_1, \mathbf{q}_2\right)$ e tomamos qualquer sub-espaço $\mathcal{H} \subset \mathcal{S}^{\mathbb{C}}$ tal que

(1) $\mathcal{S}^{\mathbb{C}} = \mathcal{H} \oplus \bar{\mathcal{H}}$.

(2) $\langle \cdot , \cdot \rangle_{KG}$ é positivo-definido em $\mathcal{H}$ tornando $\left(\mathcal{H}, \langle \cdot , \cdot \rangle_{KG}\right)$ um espaço de Hilbert.

(3) Dado $\mathbf{q}^+ \in \mathcal{H}$ e $\mathbf{q}^- \in \bar{\mathcal{H}}$, $\langle \mathbf{q}^+, \mathbf{q}^- \rangle_{KG} = 0$.

Quantizamos o campo definindo como espaço de estados o espaço de Fock $\mathfrak{F}_s\left(\mathcal{H}\right) \equiv \mathbb{C} \oplus_n \left(\otimes_{s_{j=1}}^{n} \mathcal{H} \right)$.

Em tal espaço, definimos os operadores de Heisenberg de posição como

$$\mathbf{q}_H(\tau) = \sum_j \left[\mathbf{u}_{\omega_j}(t) a(\bar{\mathbf{u}}_{\omega_j}) + \bar{\mathbf{u}}_{\omega_j}(t) a^\dagger(\mathbf{u}_{\omega_j})\right]$$

onde $K : \mathcal{S}^{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}$ é o projetor que pega soluções arbitrárias $\mathbf{q}(t)$ e projeta em sua parte de norma positiva.

Quantização de N Osciladores Harmônicos Desacoplados

Resumo

O estado de vácuo é o vetor

$|0\rangle = (1,0,0\cdots) \in \mathfrak{F}_s\left(\mathscr{H}\right)$

que satisfaz $a(\bar{\boldsymbol{\xi}})\,|0\rangle = 0, \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathscr{H}$.

Note que a escolha de "vácuo" (e, consequentemente, de excitações sobre esse vácuo) está intimamente ligada à escolha de $\mathscr{H}$. Para a escolha usual de $\mathscr{H}$ para o conjunto de oscilares, i.e.,

$$\mathscr{H} \equiv \left\{ \sum \alpha_j \mathbf{u}_{\omega_j} : \alpha_1, \cdots, \alpha_N \in \mathbb{C} \right\} \text{ com } \left\{ \mathbf{u}_{\omega_j} \equiv \left(0,\cdots,0,\frac{e^{-i\omega_j(t-\tau)}}{\sqrt{2m_j\omega_j}}0,\cdots,0 \right) : j = 1,\cdots,N \right\} \text{ e } \langle \mathbf{u}_{\omega_i}, \mathbf{u}_{\omega_j} \rangle_{KG} = \delta_{ij},$$

$|0\rangle = (1,0,0\cdots) \in \mathfrak{F}_s\left(\mathscr{H}\right)$ define o vácuo (ground state) usual do oscilador.

Voltaremos a esse fato mais a frente...