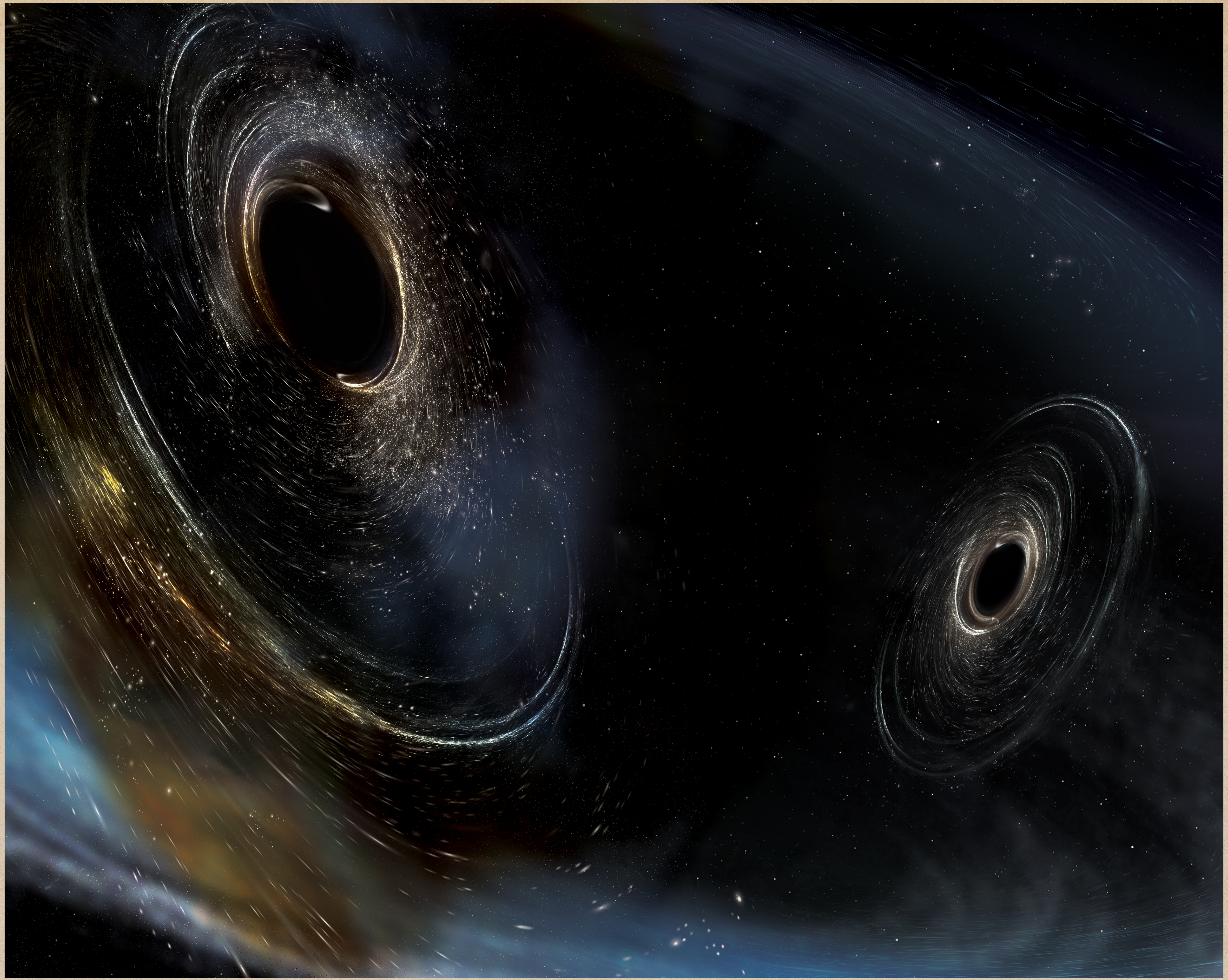
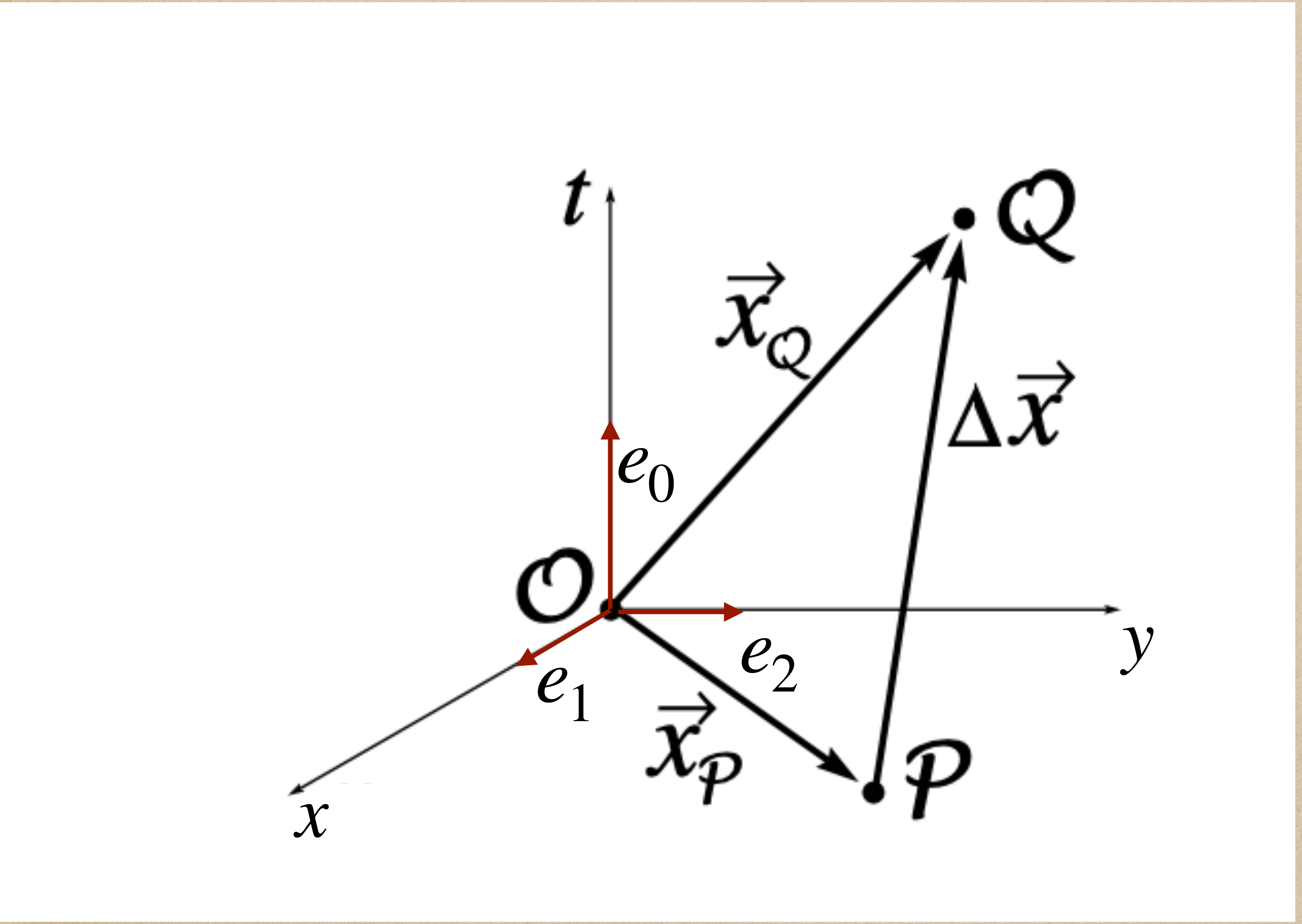


Alguns Aspectos Geométricos da Relatividade

O Espaço-Tempo de Minkowski



$$x_{\mathcal{Q}} = \sum_{\mu} x^{\mu}_{\mathcal{Q}} e_{\mu} \qquad x_{\mathcal{P}} = \sum_{\mu} x^{\mu}_{\mathcal{P}} e_{\mu}$$

$$\Delta x_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} = x_{\mathcal{P}} - x_{\mathcal{P}} \equiv \sum_{\mu} \Delta x^{\mu} e_{\mu} = (\Delta t, \Delta \mathbf{x})$$

Espaço-Tempo de Minkowski: $(\mathbb{R}^4, \eta)$

A métrica η determina distâncias espaço-temporais:

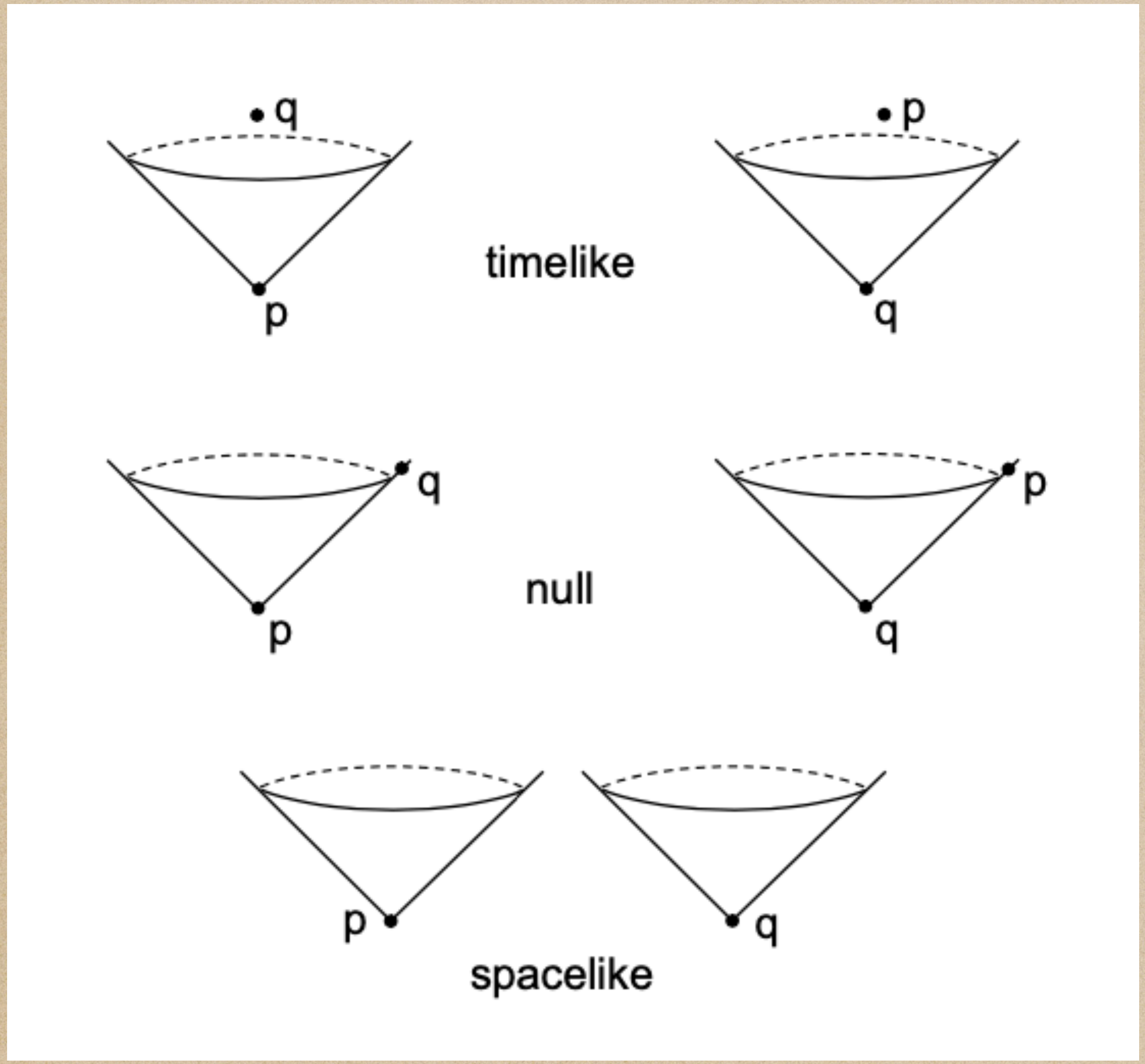
$$\Delta s^2_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \Delta x^{\mu}_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} \Delta x^{\nu}_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}$$

além da estrutura causal do espaço-tempo (i.e., a relação causal entre os eventos).

Nas coordenadas cartesianas usuais (associadas à uma família de observadores inerciais):

$$\Delta s^2_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} = -\Delta t^2_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} + \Delta \mathbf{x}^2 \rightarrow \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(-+++)$$

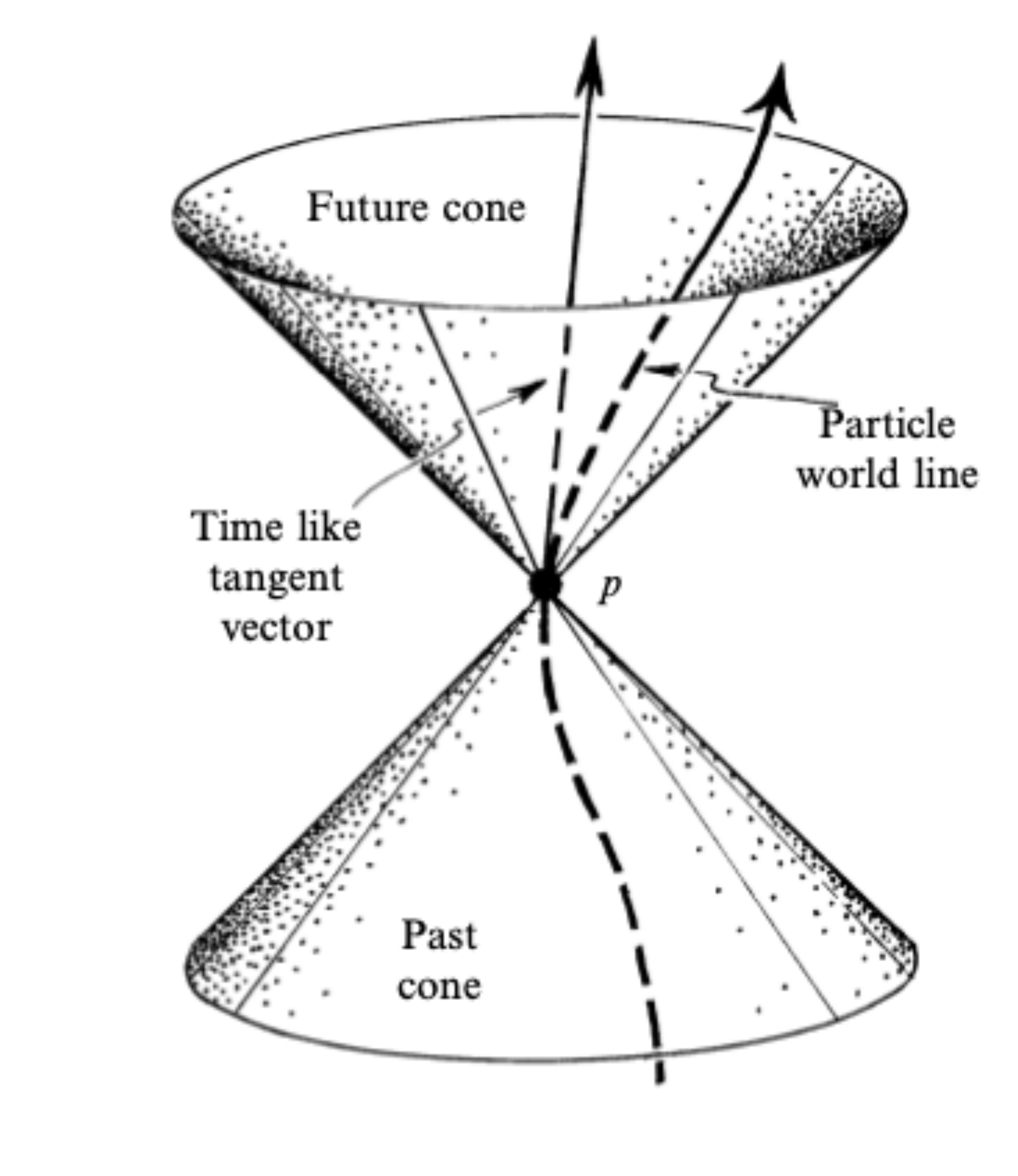
O Espaço-Tempo de Minkowski



Espaço-Tempo de Minkowski: $(\mathbb{R}^4, \eta)$

$\Delta s^2_{\mathcal{PQ}} < 0$: Eventos com separação tipo-tempo
$\Delta s^2_{\mathcal{PQ}} = 0$: Eventos com separação tipo-luz
$\Delta s^2_{\mathcal{PQ}} > 0$: Eventos com separação tipo-espaço

O Espaço-Tempo de Minkowski



Espaço-Tempo de Minkowski: $(\mathbb{R}^4, \eta)$

Se, para todos os pontos vizinhos $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q} = \mathscr{P} + d\mathscr{P}$ ao longo de uma curva no espaço-tempo satisfaz:

$ds^2_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} < 0 \rightarrow$ Curva tipo-tempo

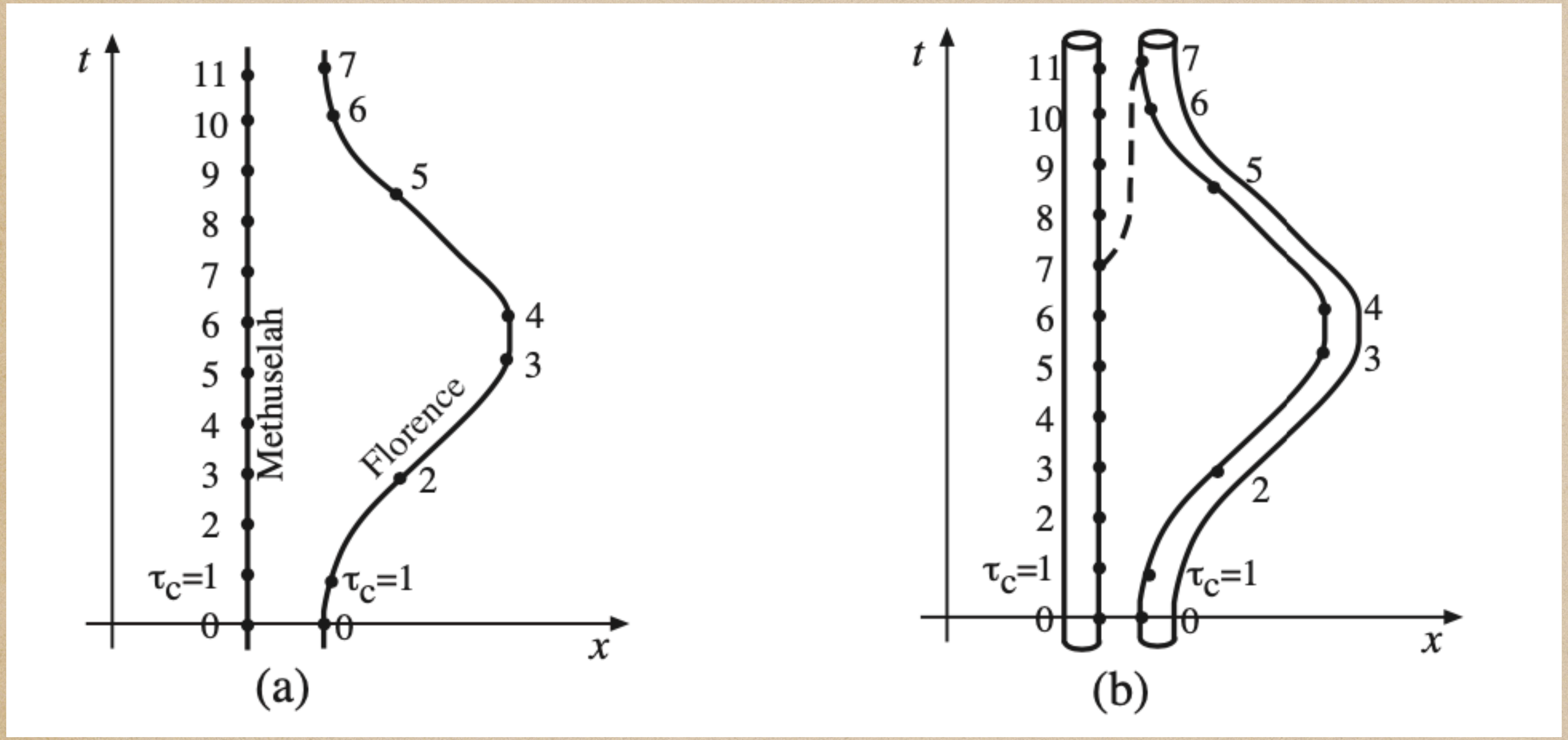
$ds^2_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} = 0 \rightarrow$ Curva tipo-luz

$ds^2_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} > 0 \rightarrow$ Curva tipo-espaço

<u>Partículas com massa:</u> movem-se em curvas tipo-tempo (chamadas de linhas de mundo)

<u>Partículas sem massa:</u> movem-se em curvas tipo-luz

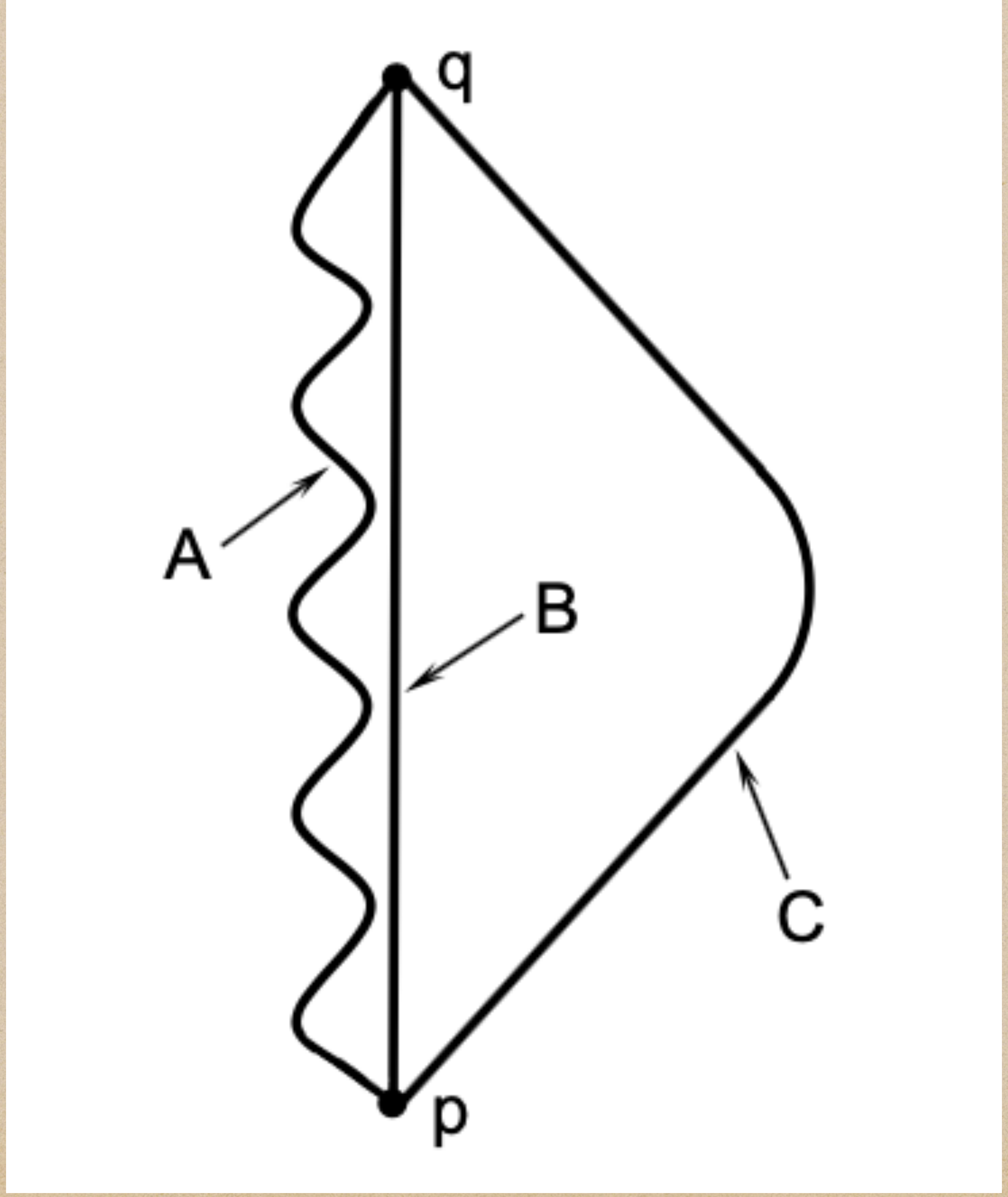
O Espaço-Tempo de Minkowski



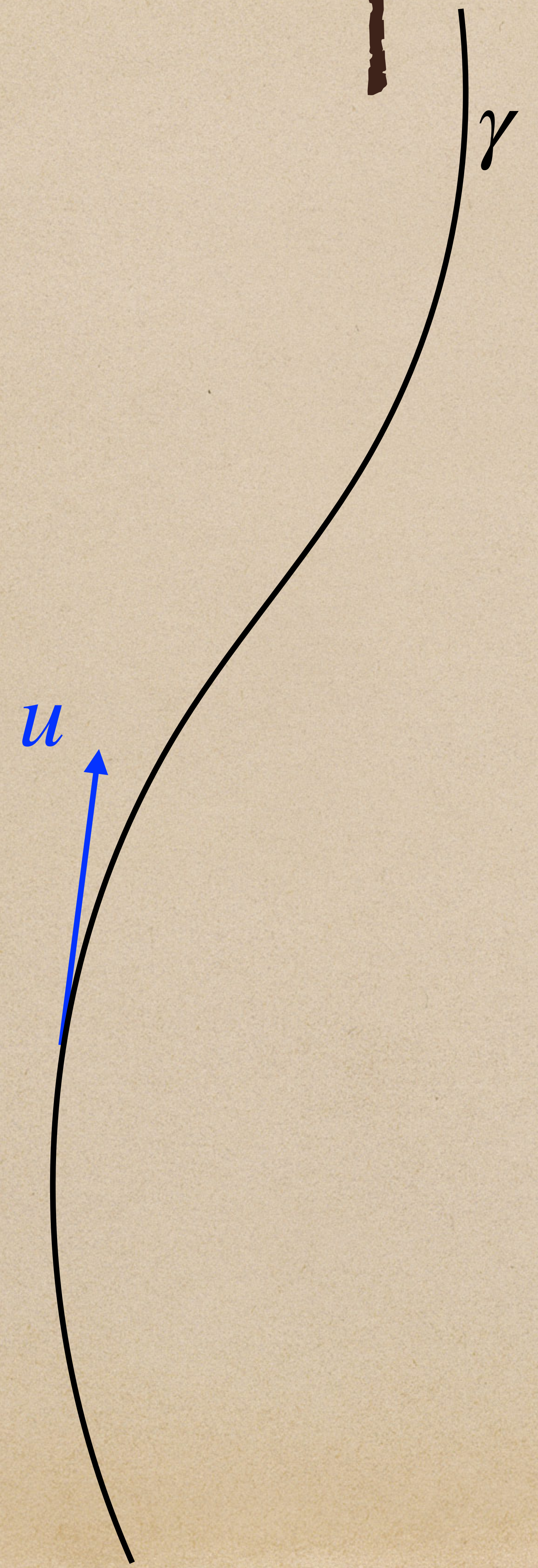
Tempo-próprio: Comprimento de uma curva tipo-tempo γ que vai de um evento $\mathscr{P}$ a um evento $\mathscr{Q}$ [é o tempo medido por relógios honestos carregados pelo observador]

$$\tau = \int_\gamma \sqrt{-ds^2} = \int_{\lambda_\mathscr{P}}^{\lambda_\mathscr{Q}} \sqrt{-\sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$$

O Espaço-Tempo de Minkowski



O Espaço-Tempo de Minkowski



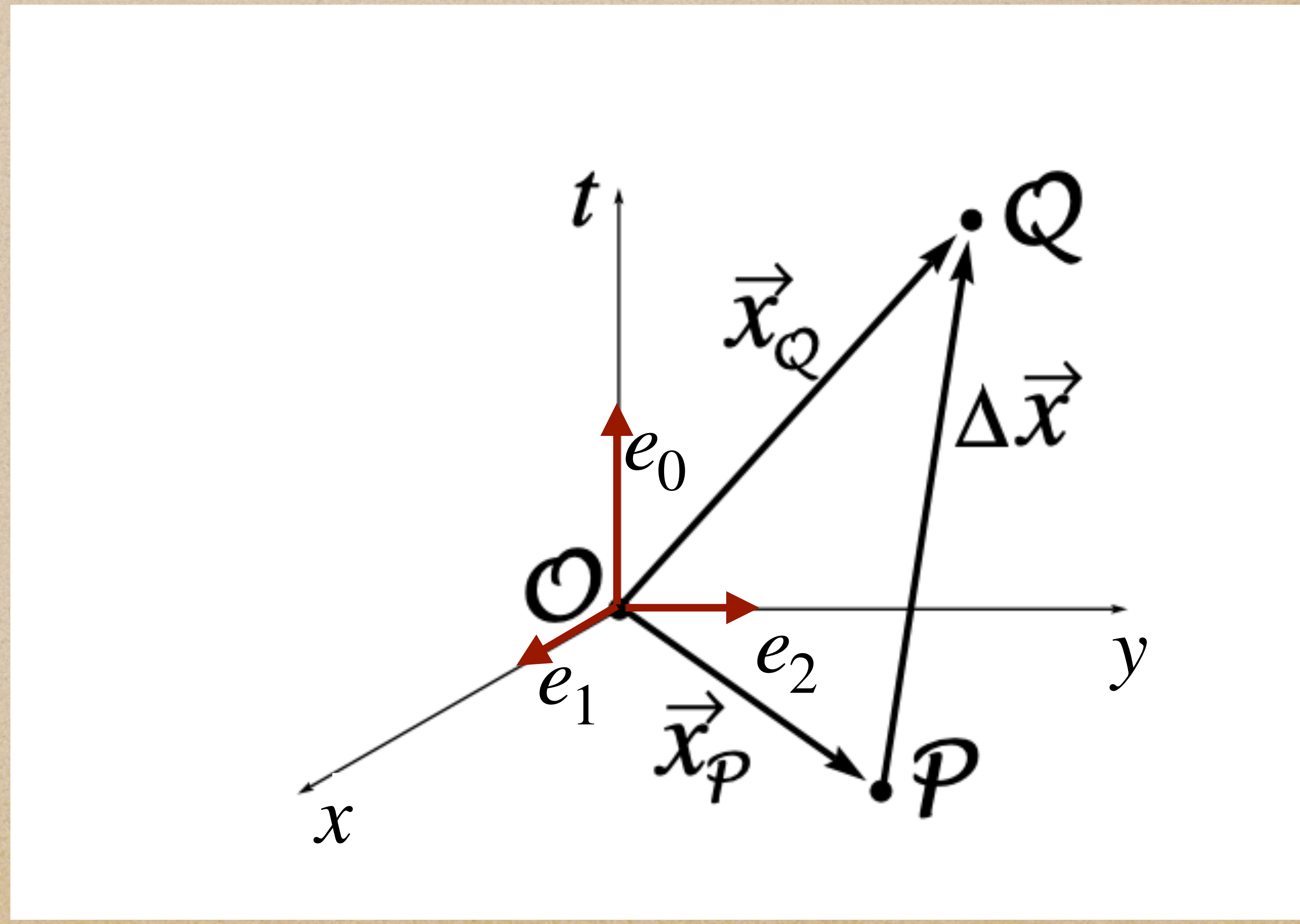
Espaço-Tempo de Minkowski: $(\mathbb{R}^4, \eta)$

Se a curva γ é parametrizada pelo tempo-próprio τ então

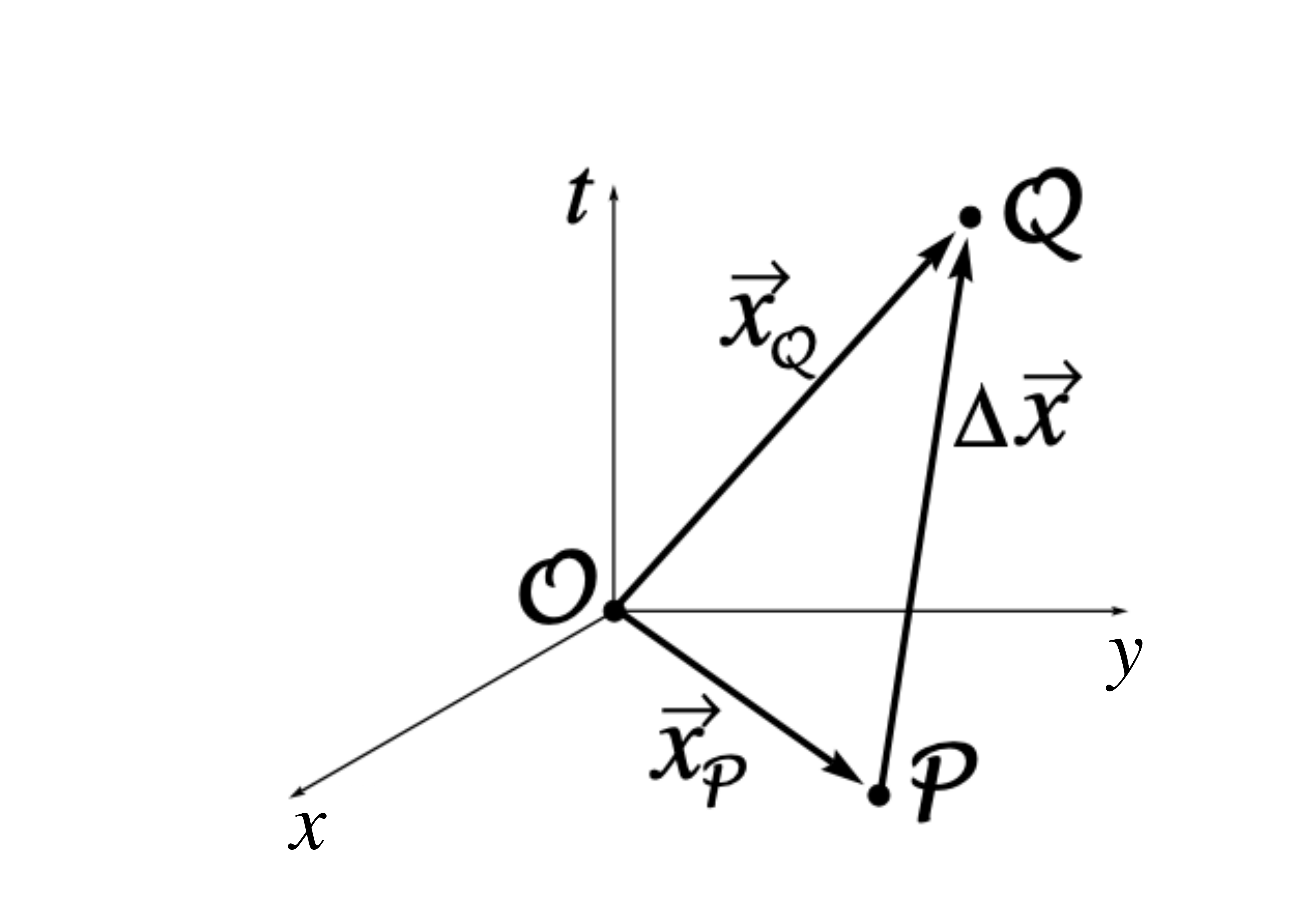
$$u = \frac{d\gamma}{d\tau} = \sum_{\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} e_\mu,\ u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

é chamada de 4-velocidade. Nesse caso

$$\sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \equiv \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -1$$



O Espaço-Tempo de Minkowski



Espaço-Tempo de Minkowski: $(\mathbb{R}^4, \eta)$

A métrica η pode ser vista como um ``produto escalar'' (sem a condição de positividade). Assim

$$\eta_{\mu\nu} \equiv \eta\left(e_\mu, e_\nu\right) \equiv \langle e_\mu, e_\nu \rangle_\eta$$

e então

$$\Delta s^2_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} \Delta x^\nu{}_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} = \eta\left(\Delta x_{\mathscr{P}\mathscr{Q}}, \Delta x_{\mathscr{P}\mathscr{Q}}\right)$$

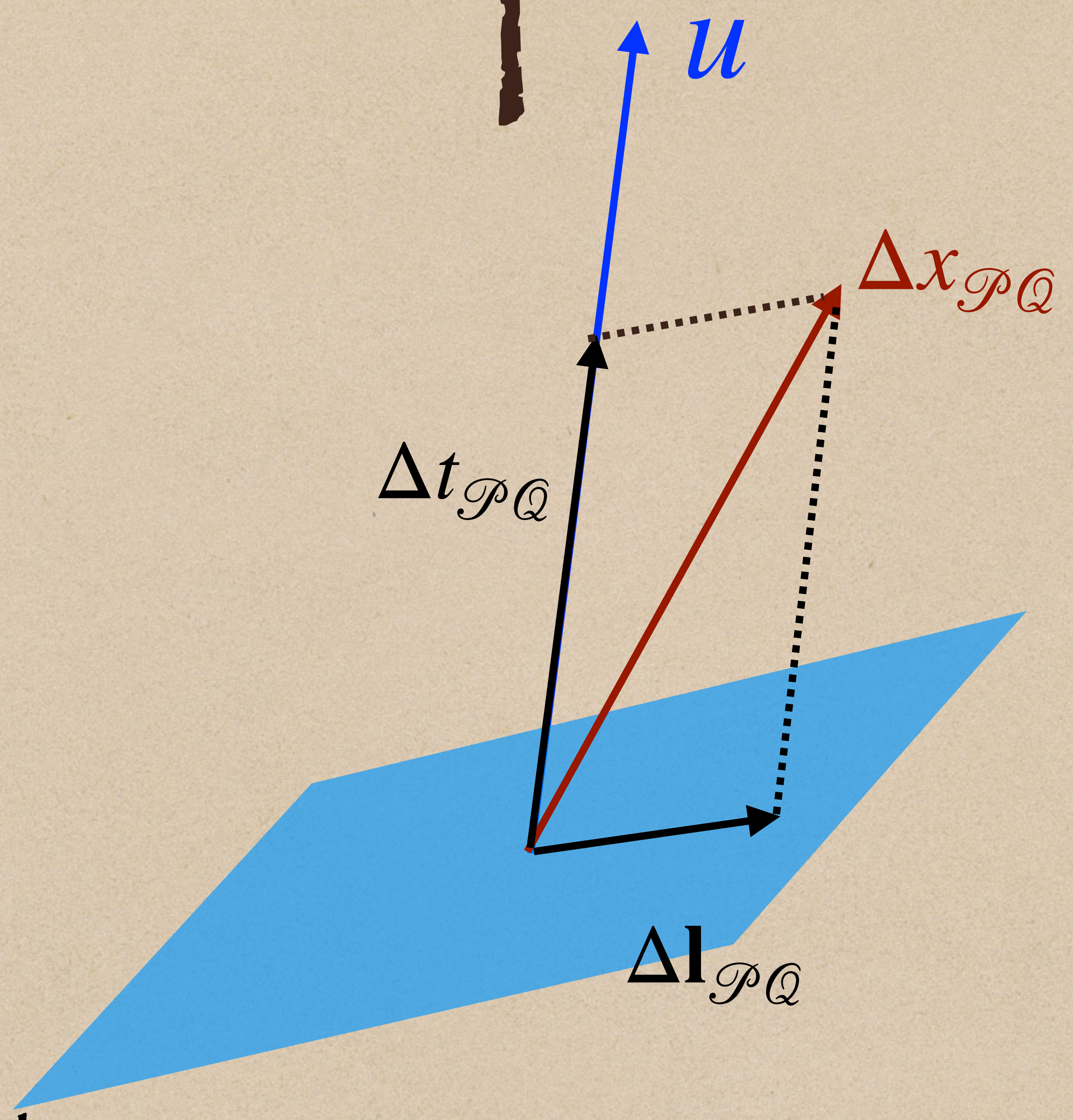
ou ainda

$$-1 = \eta(u, u) = \sum_{\mu,\nu} \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu,$$

com

$$u = \sum_\mu u^\mu e_\mu = \sum_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} e_\mu$$

O Espaço-Tempo de Minkowski



$$\Delta x_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} = \Delta t_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} u + \Delta \mathbf{l}_{\mathscr{P}\mathscr{Q}}$$

Usando η como um ``produto escalar" podemos ``separar" os invariantes espaço-temporais nas quantidades usuais de tempo e espaço, energia e momento, etc. às quais estamos mais habituados.

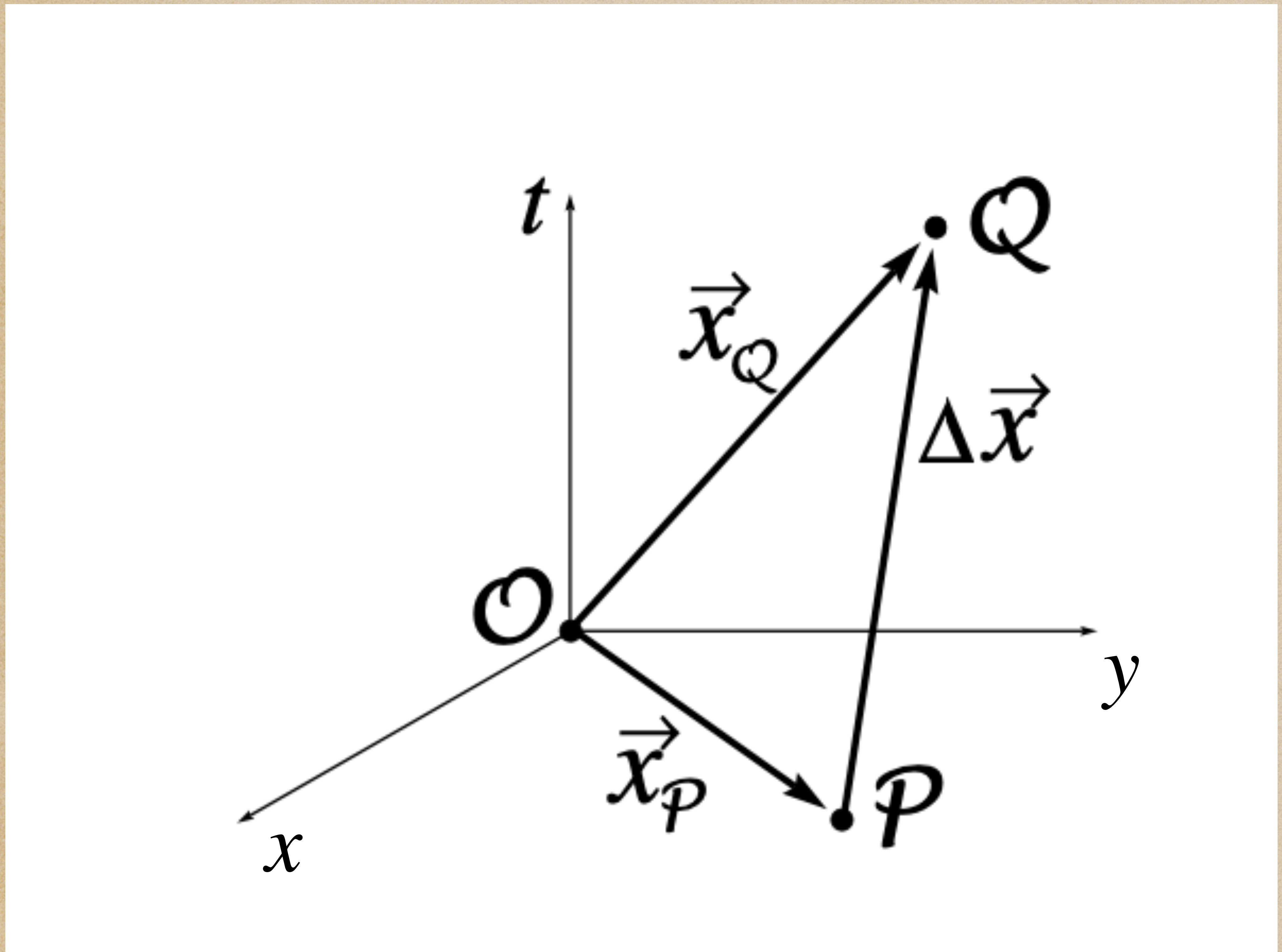
<u>Intervalo de tempo entre $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ como visto por um observador com 4-velocidade u:</u> $\Delta t_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} = -\,\eta\left(u, \Delta x_{\mathscr{P}\mathscr{Q}}\right)$

<u>Direções espaciais associadas a um observador com 4-velocidade u:</u> 4-vetores <u>$\mathbf{l}$ tal que</u> $\eta\left(u, \mathbf{l}\right) = 0$

<u>Distância espacial entre $\mathscr{P}$ e $\mathscr{Q}$ como visto por um observador com 4-velocidade u:</u> $\Delta l_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} = \sqrt{\eta\left(\Delta \mathbf{l}_{\mathscr{P}\mathscr{Q}}, \Delta \mathbf{l}_{\mathscr{P}\mathscr{Q}}\right)}$

onde $\Delta \mathbf{l}_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} \equiv \Pi_u \Delta x_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} \equiv \eta\left(u, \Delta x_{\mathscr{P}\mathscr{Q}}\right) u + \Delta x_{\mathscr{P}\mathscr{Q}}$

O Espaço-Tempo de Minkowski



$$x_{\mathcal{Q}} = \sum_{\mu} x^{\mu}_{\mathcal{Q}} e_{\mu} \qquad x_{\mathcal{P}} = \sum_{\mu} x^{\mu}_{\mathcal{P}} e_{\mu}$$

$$\Delta x_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} = x_{\mathcal{P}} - x_{\mathcal{P}} \equiv \sum_{\mu} \Delta x^{\mu} e_{\mu} = (\Delta t, \Delta \mathbf{x})$$

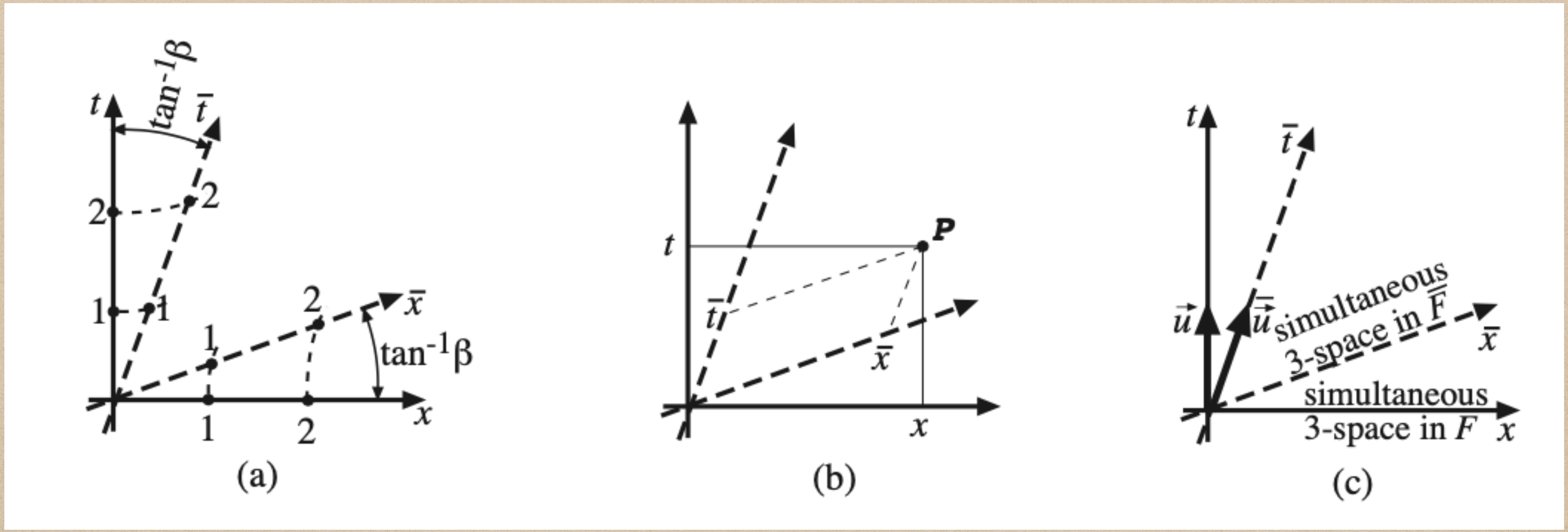
Intervalo de tempo entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ como visto por um observador com 4-velocidade $u = e_0$: $\Delta t_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} = -\,\eta\left(e_0, \Delta x_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}\right) = \Delta t$

Direções espaciais associadas a um observador com 4-velocidade $u = e_0$: 4-vetores L tal que $\eta\left(e_0, \mathbf{l}\right) = 0 \to \mathbf{l} = \sum_j l^j e_j$

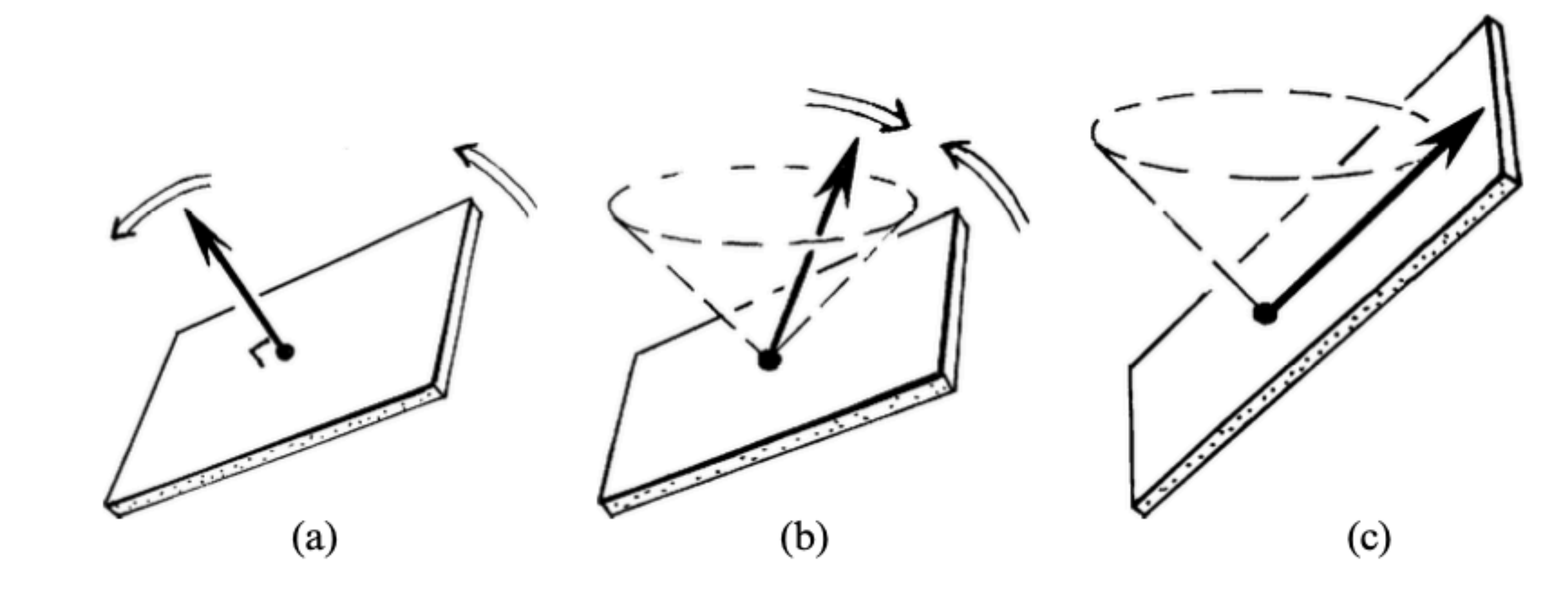
Distância espacial entre $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ como visto por um observador com 4-velocidade $u = e_0$: $\Delta l_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} = \sqrt{\eta\left(\Delta \mathbf{l}_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}, \Delta \mathbf{l}_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}\right)} = \sum_j \left(\Delta x^j\right)^2 \equiv \Delta \mathbf{x}^2$

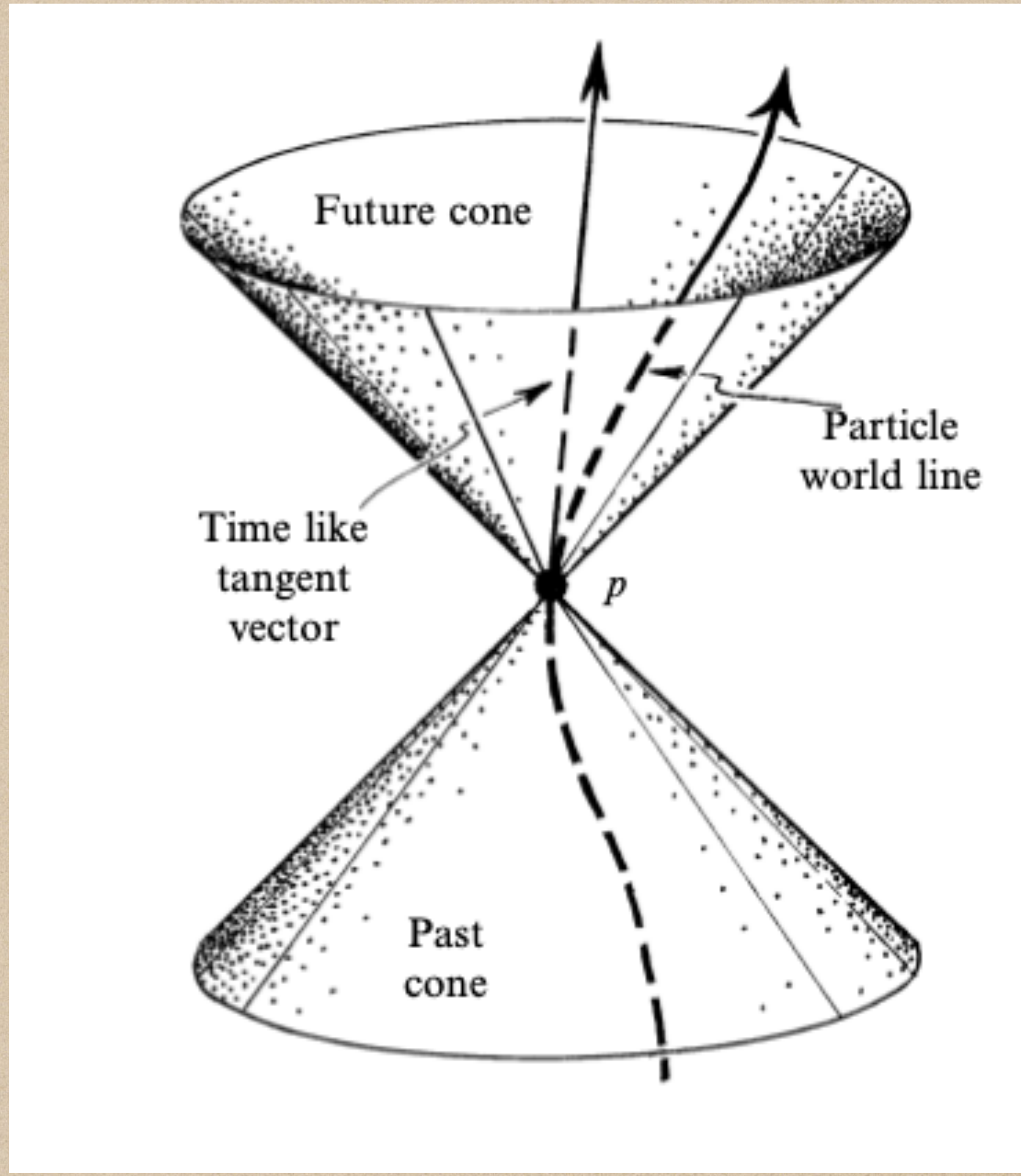
onde $\Delta \mathbf{l}_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} \equiv \Pi_u \Delta x_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} \equiv \eta\left(e_0, \Delta x_{\mathcal{P}\mathcal{Q}}\right) e_0 + \Delta x_{\mathcal{P}\mathcal{Q}} = \sum_j \Delta x^j e_j$

O Espaço-Tempo de Minkowski



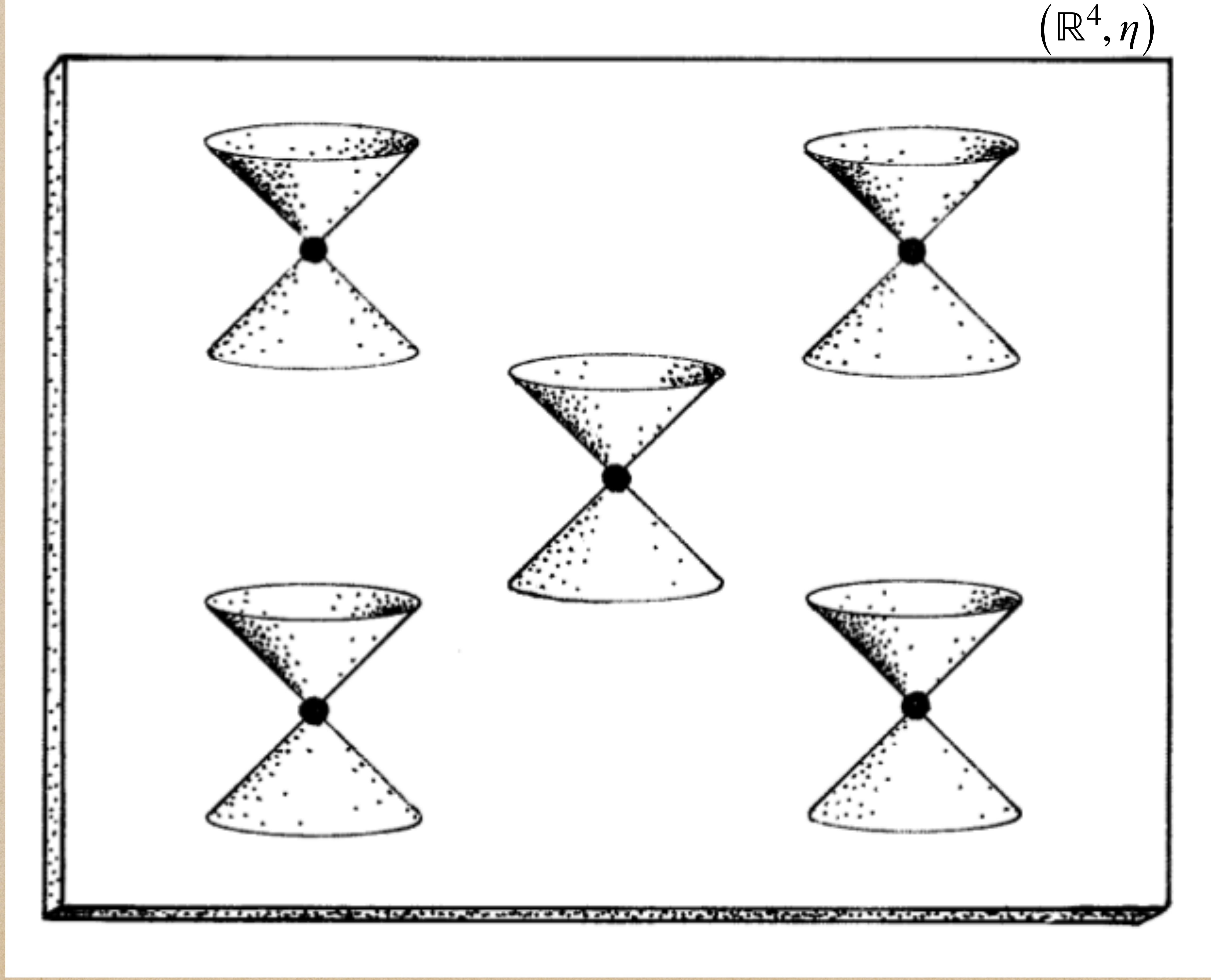
O Espaço-Tempo de Minkowski



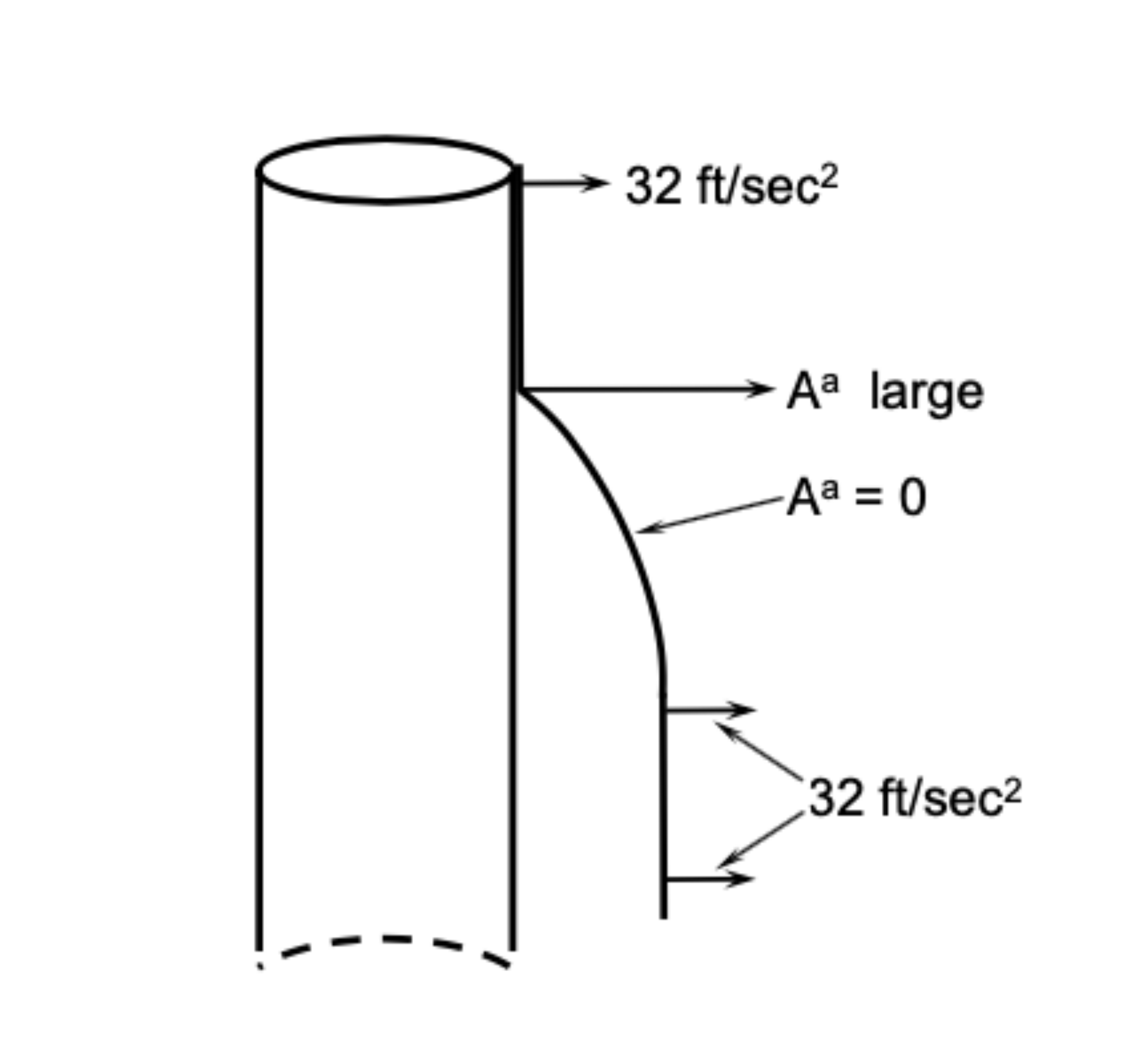


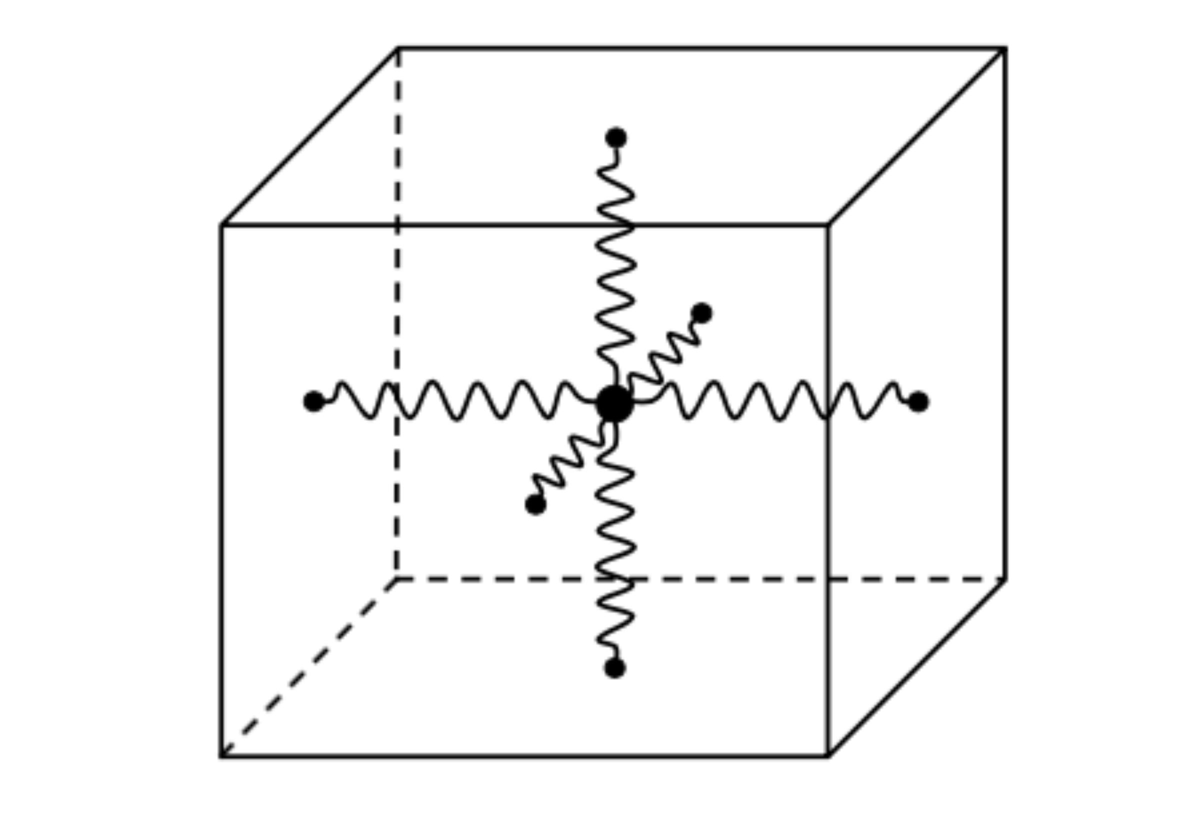
<u>Cone de Luz de um evento P:</u> Conjunto dos 4-vetores L com $\eta\,(L, L) = 0$

O Espaço-Tempo de Minkowski

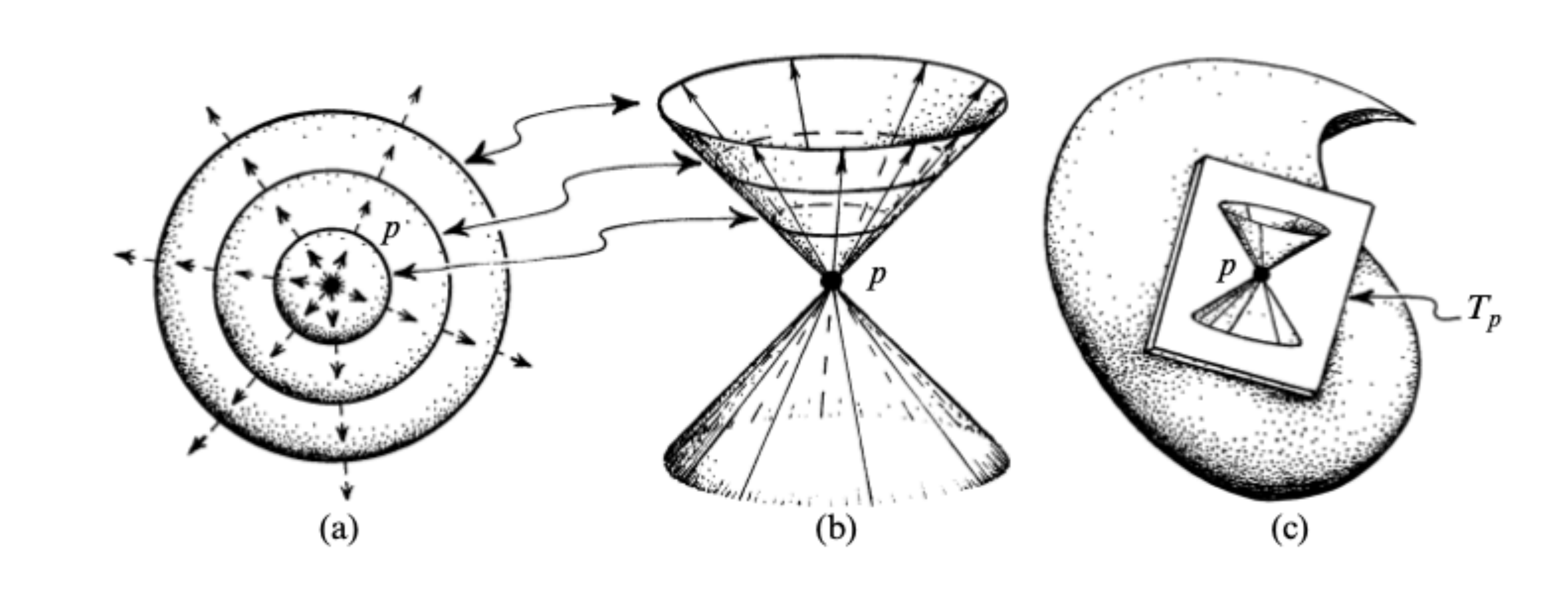


Espaços-Tempos Gerais

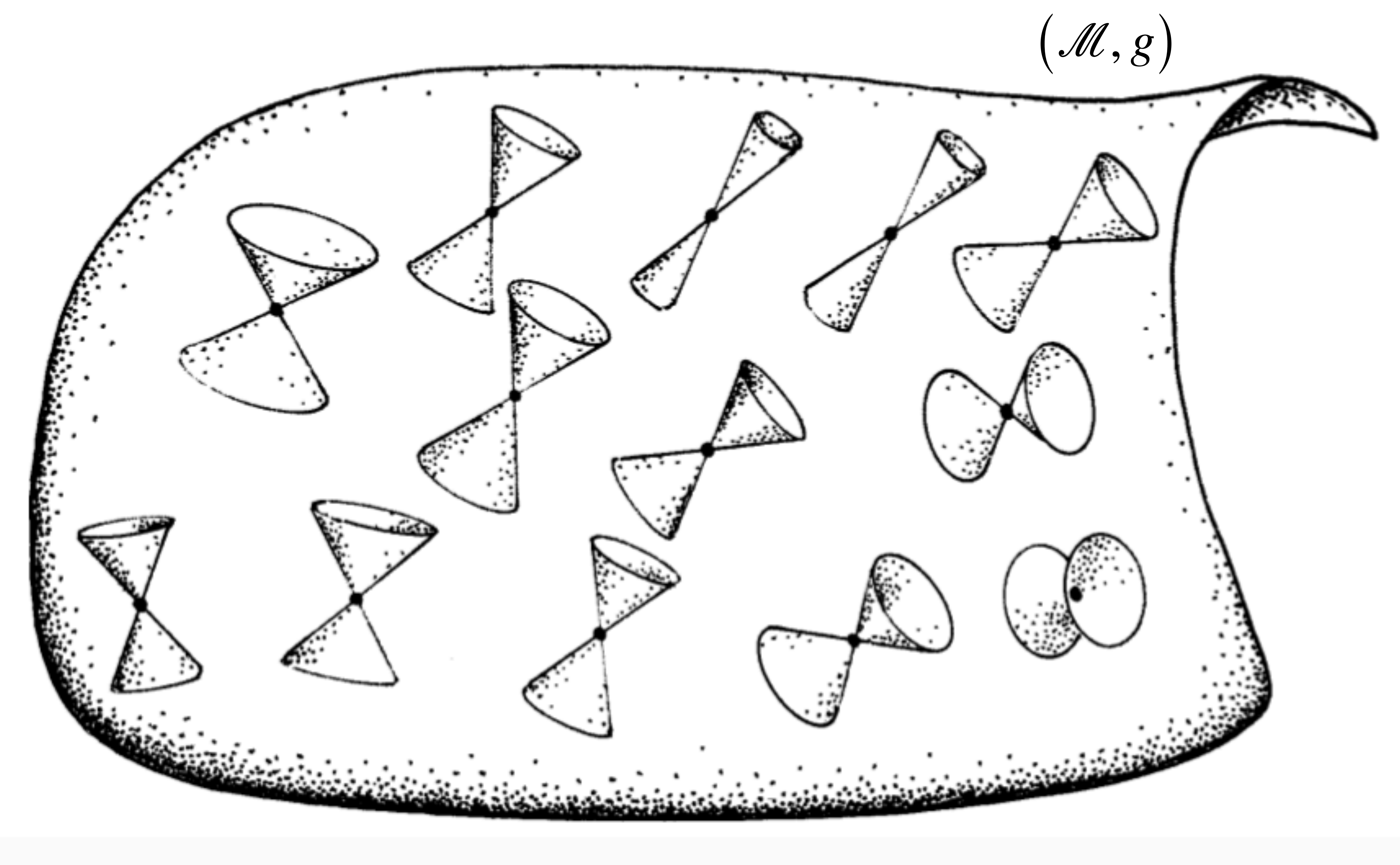




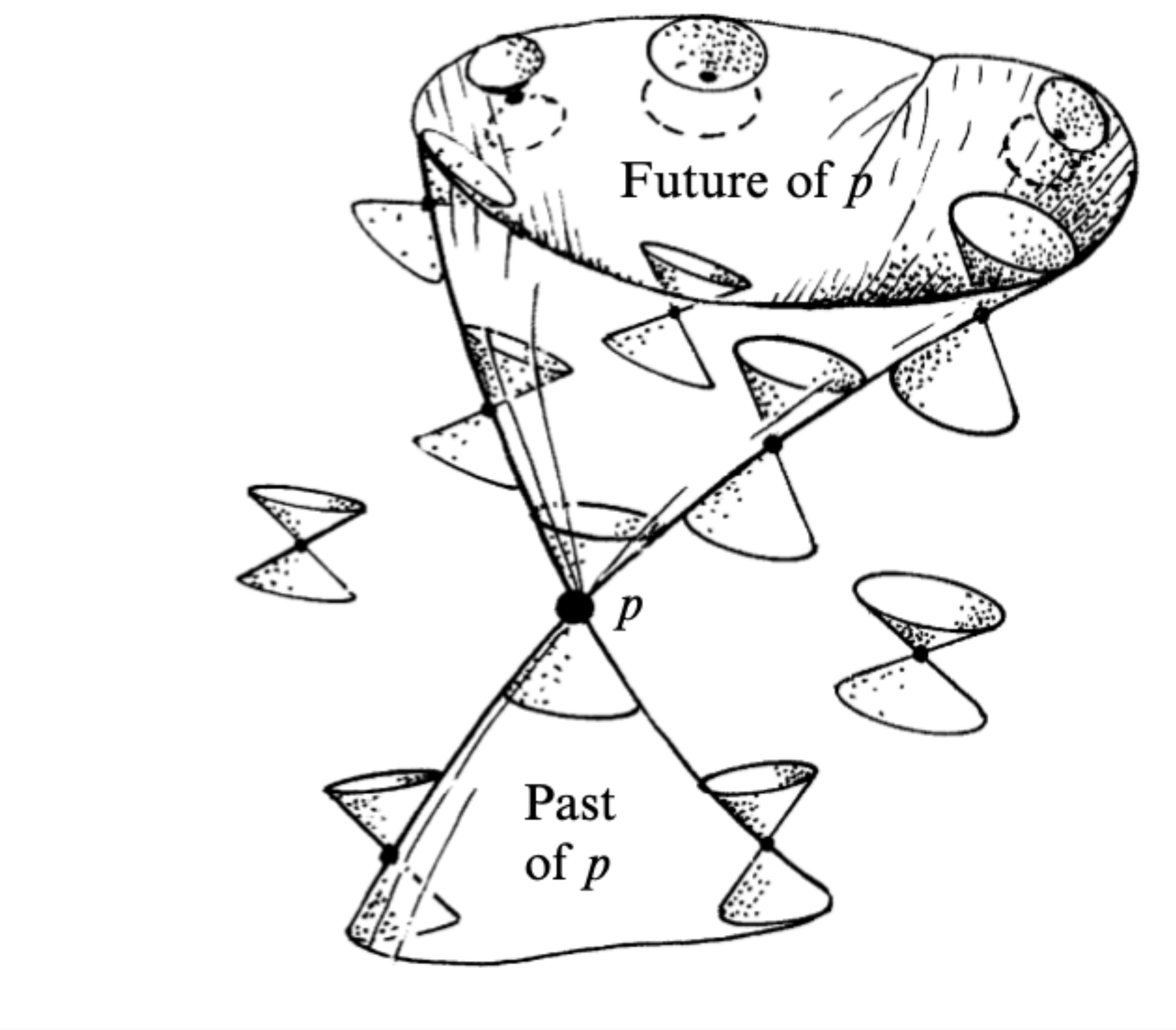
Espaços-Tempos Gerais

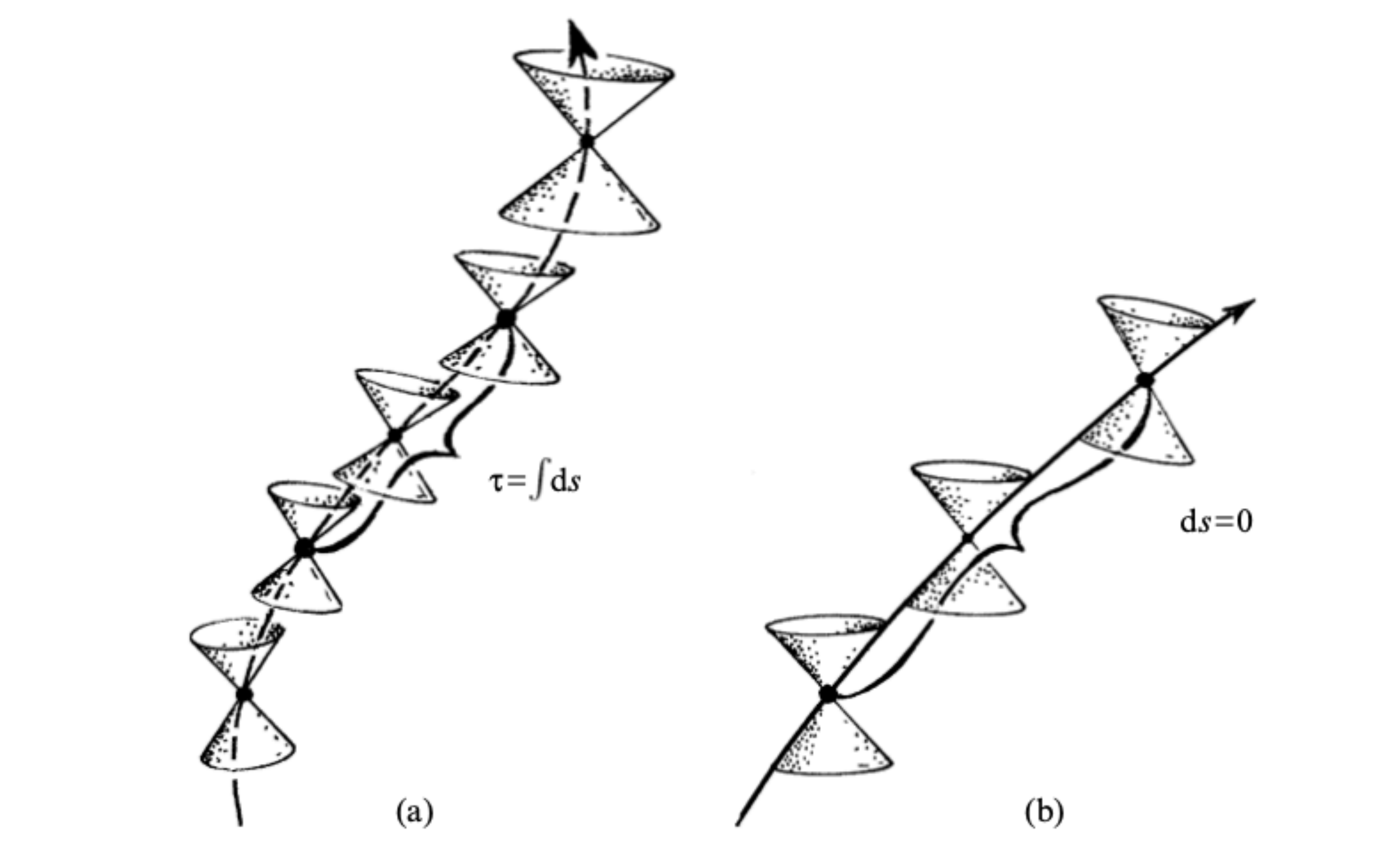


Espaços-Tempos Gerais

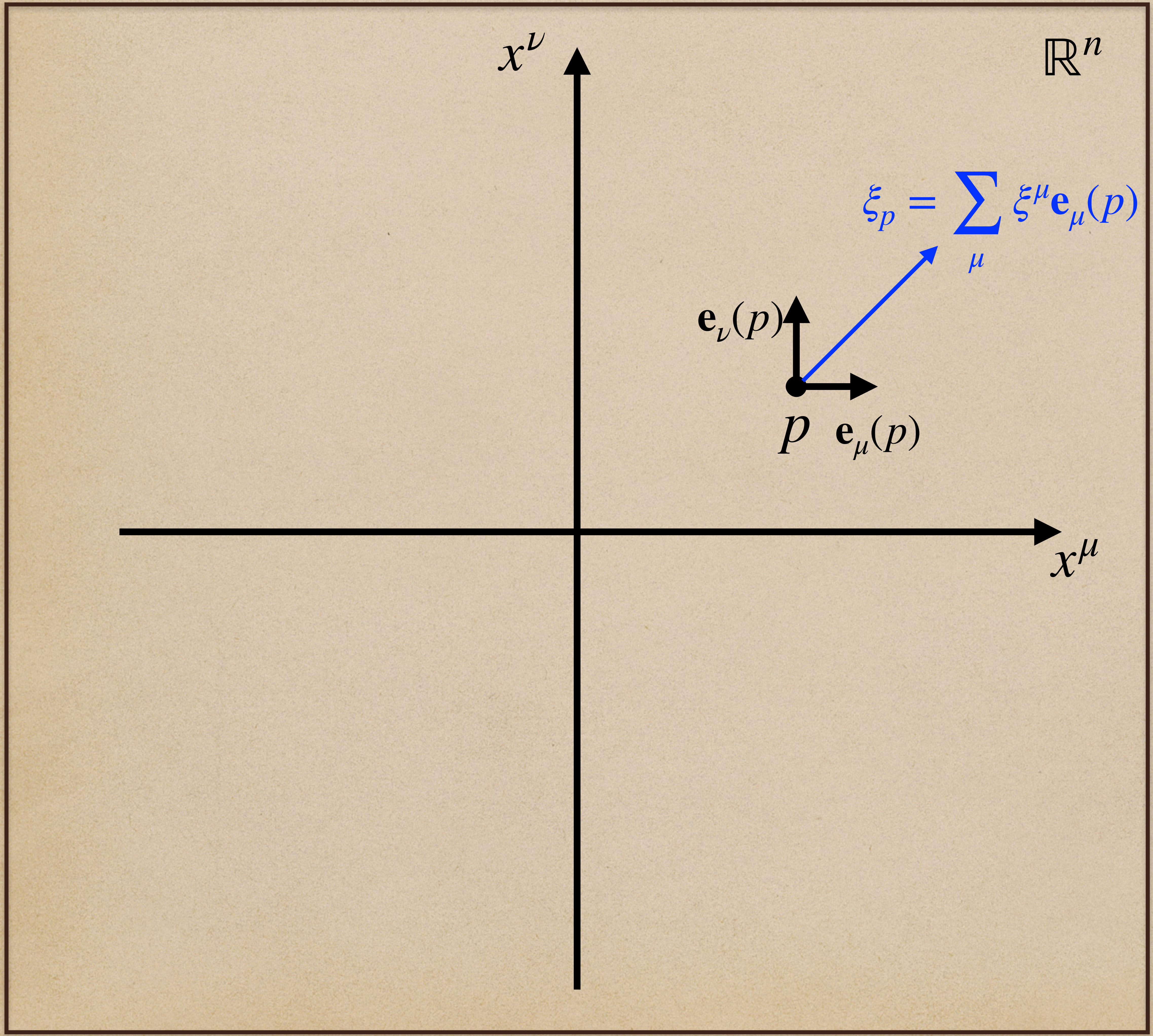


Espaços-Tempos Gerais





Vetores Tangentes



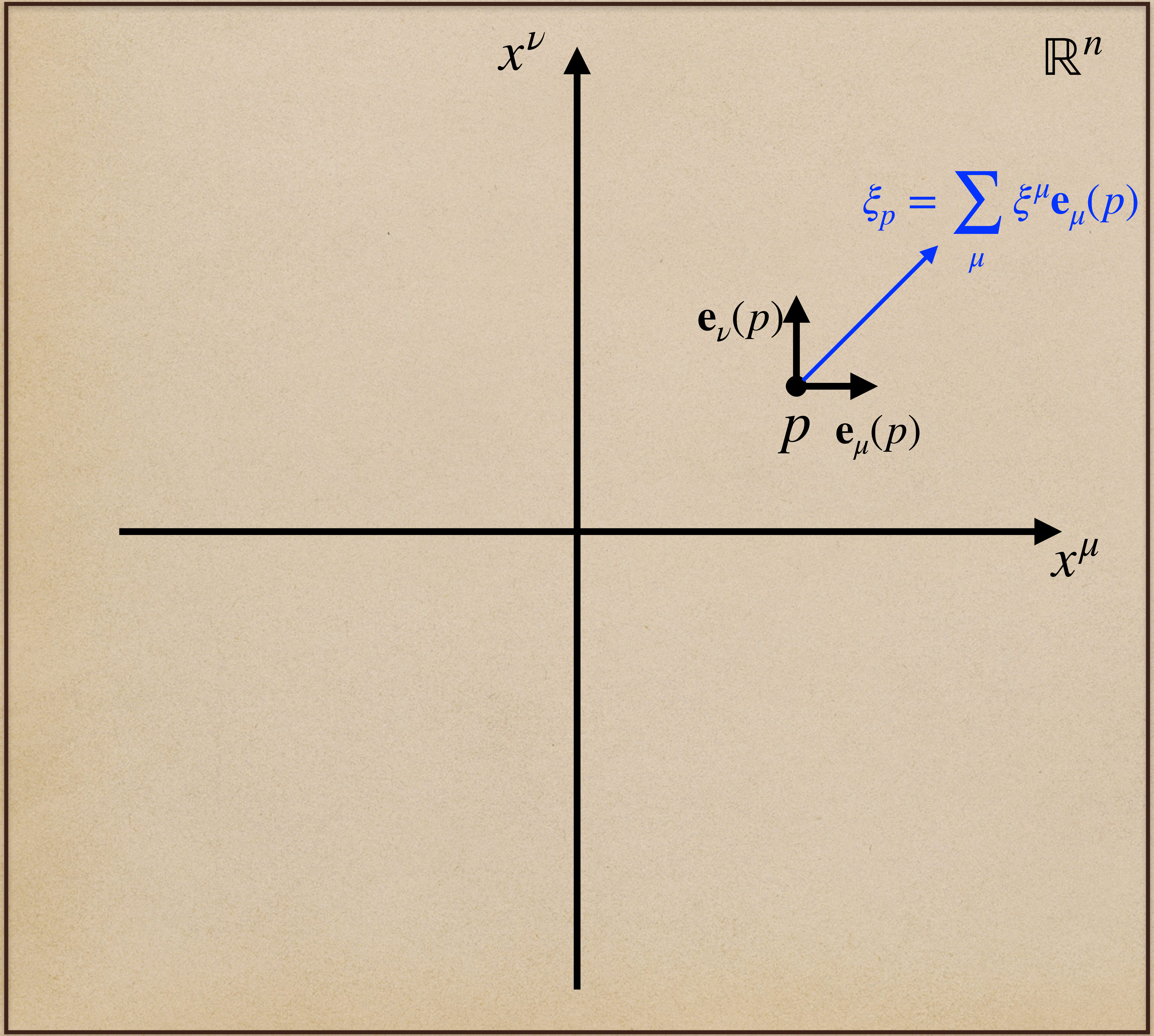
Motivação: Tomemos $\mathscr{M} = \mathbb{R}^n$

(1) Dado um vetor ξ_p em p, podemos calcular a derivada direcional de qualquer função ao longo de ξ_p no ponto p : $D_{\xi_p} f \equiv \xi_p \cdot \nabla f = \sum_\mu \xi^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(p)$

(2) Reciprocamente, se dermos como a derivada direcional D_{ξ_p} no ponto p age em qualquer função f, isso determina univocamente o vetor ξ_p: Tome x^μ (que é uma função em $\mathbb{R}^n$), então

$c^\mu \equiv D_{\xi_p} x^\mu = \sum_\nu \xi^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \xi^\mu$. Assim, fazendo isso para todo $\mu = 1, \cdots, n$, determinamos todas as componentes de ξ_p e assim, tal vetor fica determinado univocamente

Vetores Tangentes



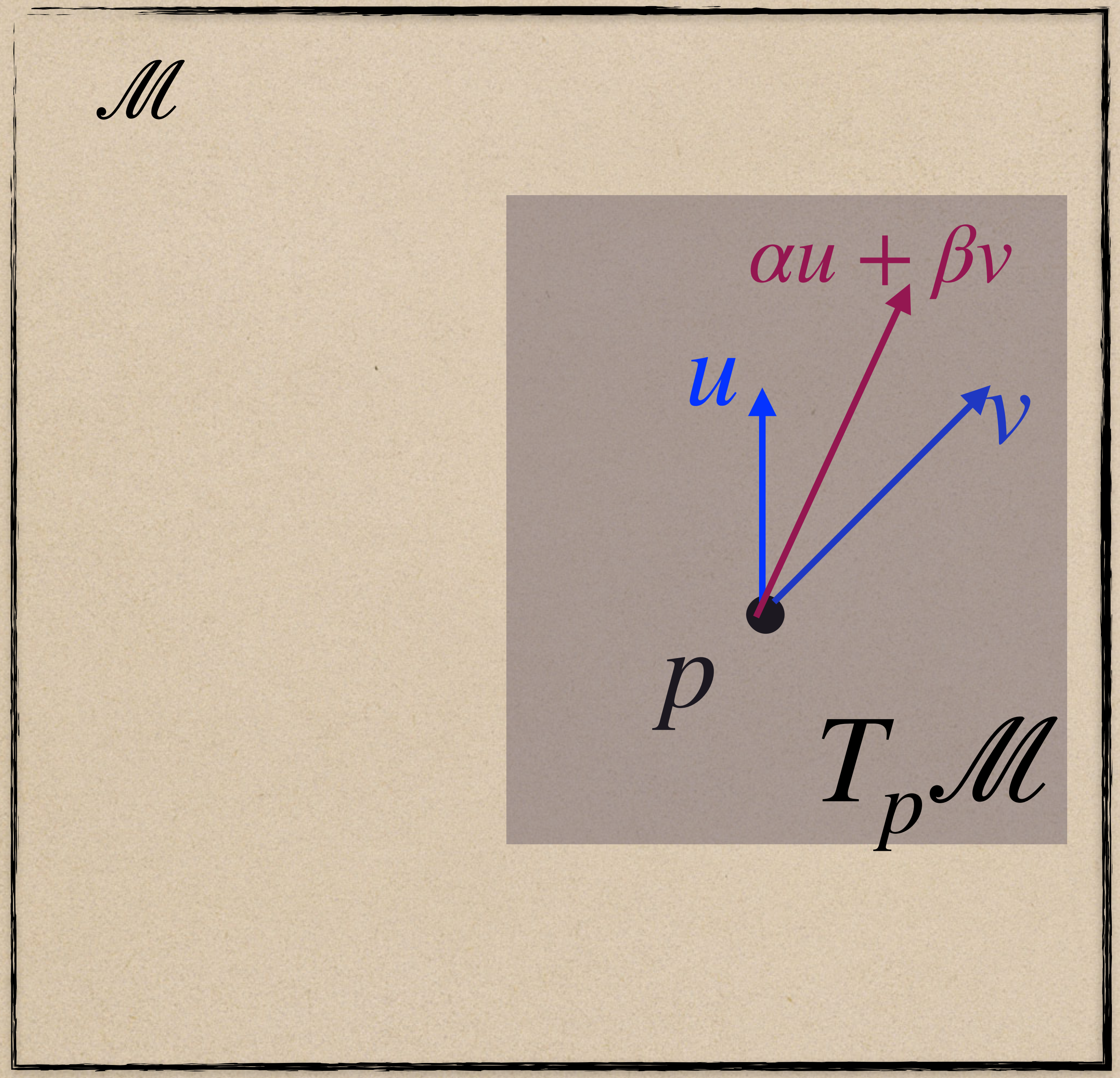
Motivação: Portanto, temos uma identificação entre vetores tangentes a um ponto p fixo e derivadas direcionais nesse ponto: $D_{\xi_p} \leftrightarrow \xi_p$. Como variedades diferenciáveis arbitrárias $\mathscr{M}$ não tem estrutura de espaço vetorial, essa definição de vetor como uma derivada direcional em um ponto (definindo vetor tangente a um certo ponto) será muito mais conveniente.

Sabemos de cálculo que D_{ξ_p} satisfaz :

(1) Linearidade: $D_{\xi_p}(\alpha f + \beta g) = \alpha D_{\xi_p} f + \beta D_{\xi_p} g$, com f, g diferenciáveis em p e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(2) Regra de Leibniz: $D_{\xi_p}(fg) = f(p) D_{\xi_p} g + g(p) D_{\xi_p} f$, com f, g diferenciáveis em p

Vetores Tangentes



Vetor tangente a p: Seja $\mathscr{M}$ uma variedade diferenciável de dimensão n. Um vetor tangente a p é uma derivação em $\mathscr{M}$, i.e., é uma função $v : f \in \mathscr{F}(\mathscr{M}) \to v(f) \in \mathbb{R}$ que satisfaz:

(1) Linearidade: $v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$, com f, g diferenciáveis em p e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

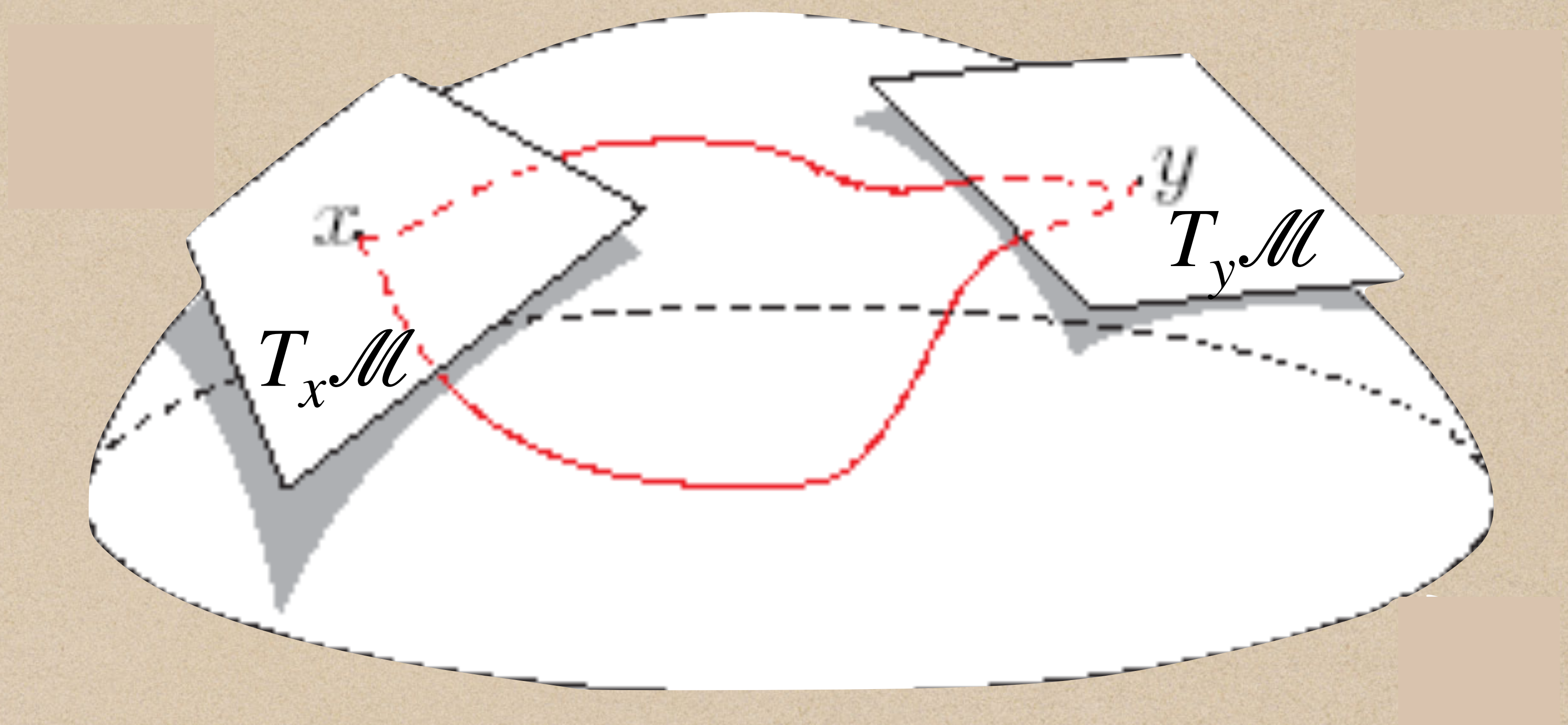
(2) Regra de Leibniz: $v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f)$, com f, g diferenciáveis em p.

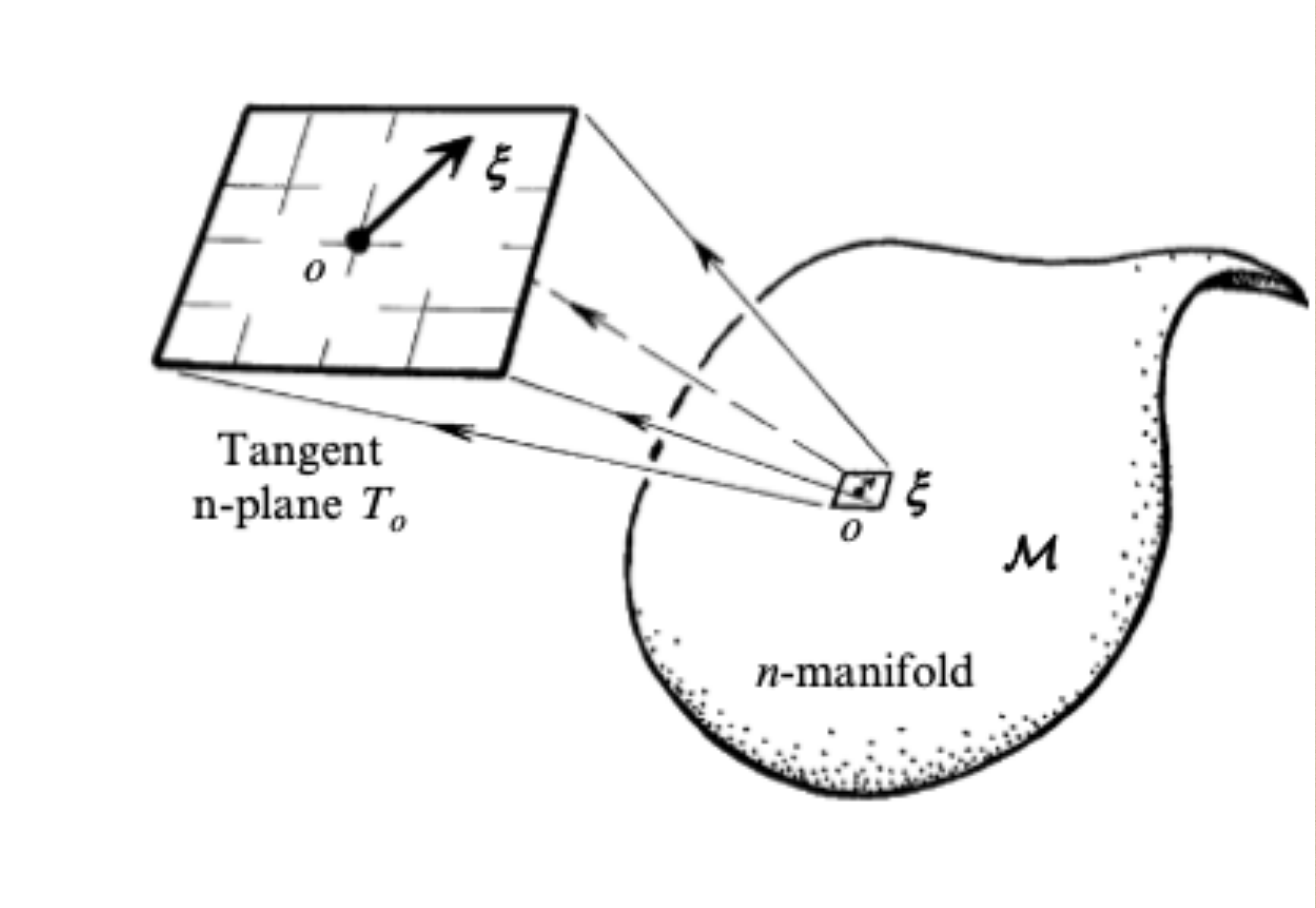
O conjunto de todos os vetores tangentes a p munido das operações de soma e produto por escalar:

$$(\alpha v + \beta u)(f) \equiv \alpha v(f) + \beta u(f), \forall f \in \mathscr{F}(\mathscr{M}), \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

forma um espaço vetorial denotado por espaço tangente à p, $T_p\mathscr{M}$ (ou ainda V_p)

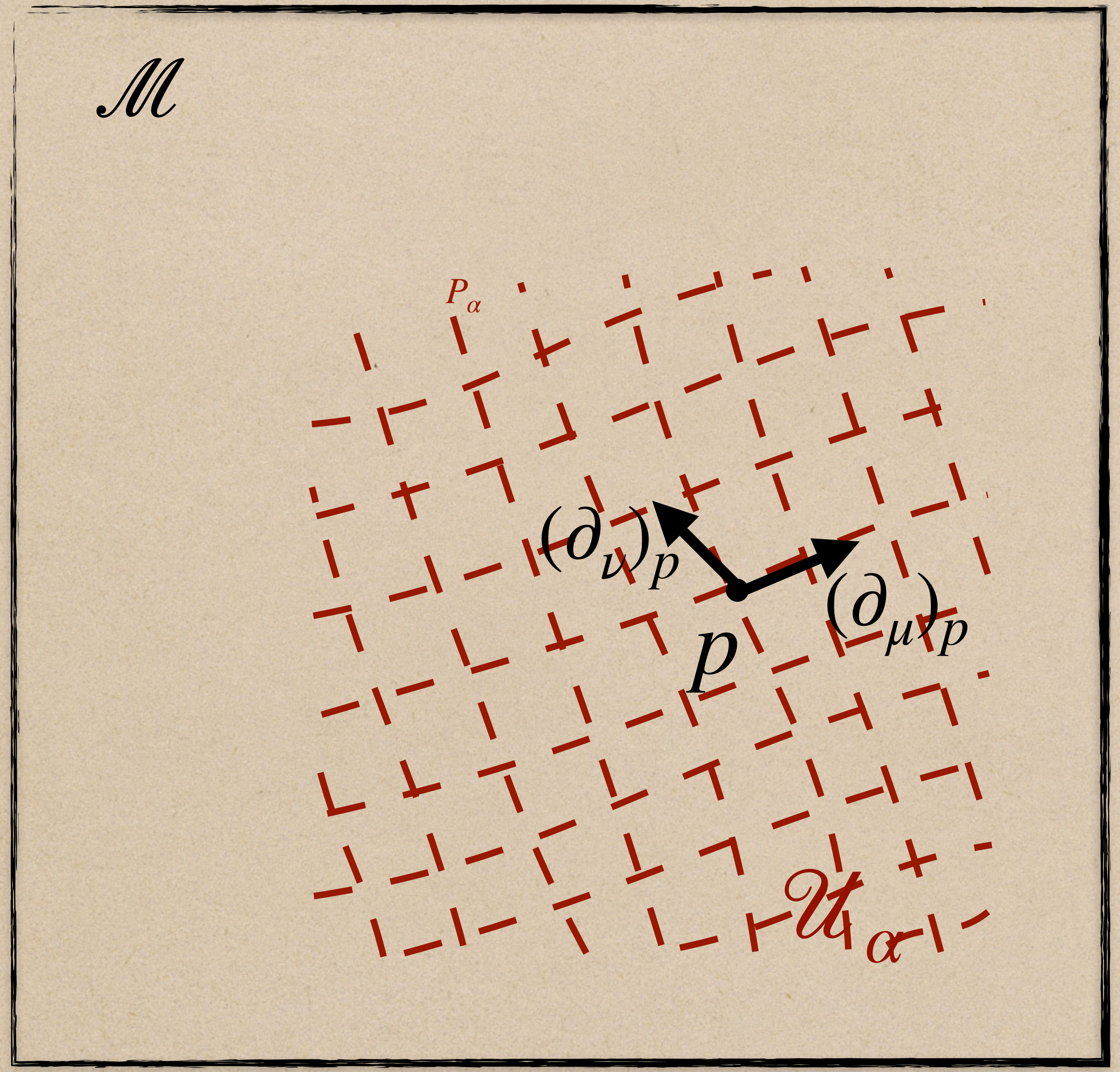
Vetores Tangentes





<u>Vetor tangente:</u> Cada ponto p tem associado um espaço tangente $T_p\mathcal{M}$ e não há conexão entre espaços tangentes diferentes (só faz sentido somar vetores e multiplica-los por escalares dentro do mesmo espaço tangente)

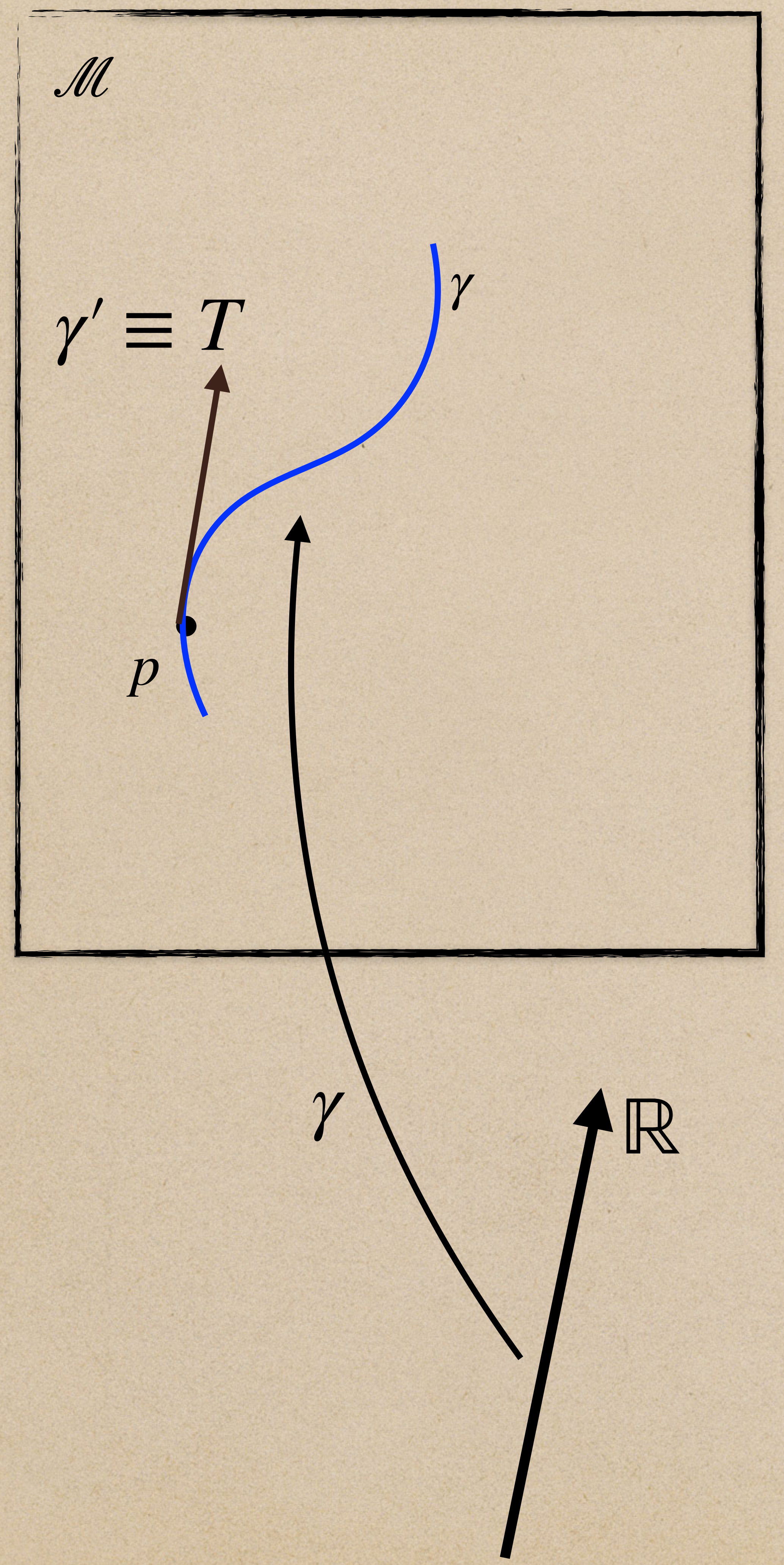
Vetores Tangentes



Vetor tangente: Um exemplo importante de vetor tangente são os vetores coordenados $\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \equiv \left(\partial_\mu\right)_p$. Eles são definidos da seguinte forma: Dado uma carta local qualquer ψ_α em p, que define coordenadas $\psi_\alpha(p) = (x^1, \cdots, x^n)$, temos que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p f \equiv \frac{\partial\left(f \circ \psi_\alpha^{-1}\right)}{\partial x^\mu}(x^1, \cdots, x^n)$$

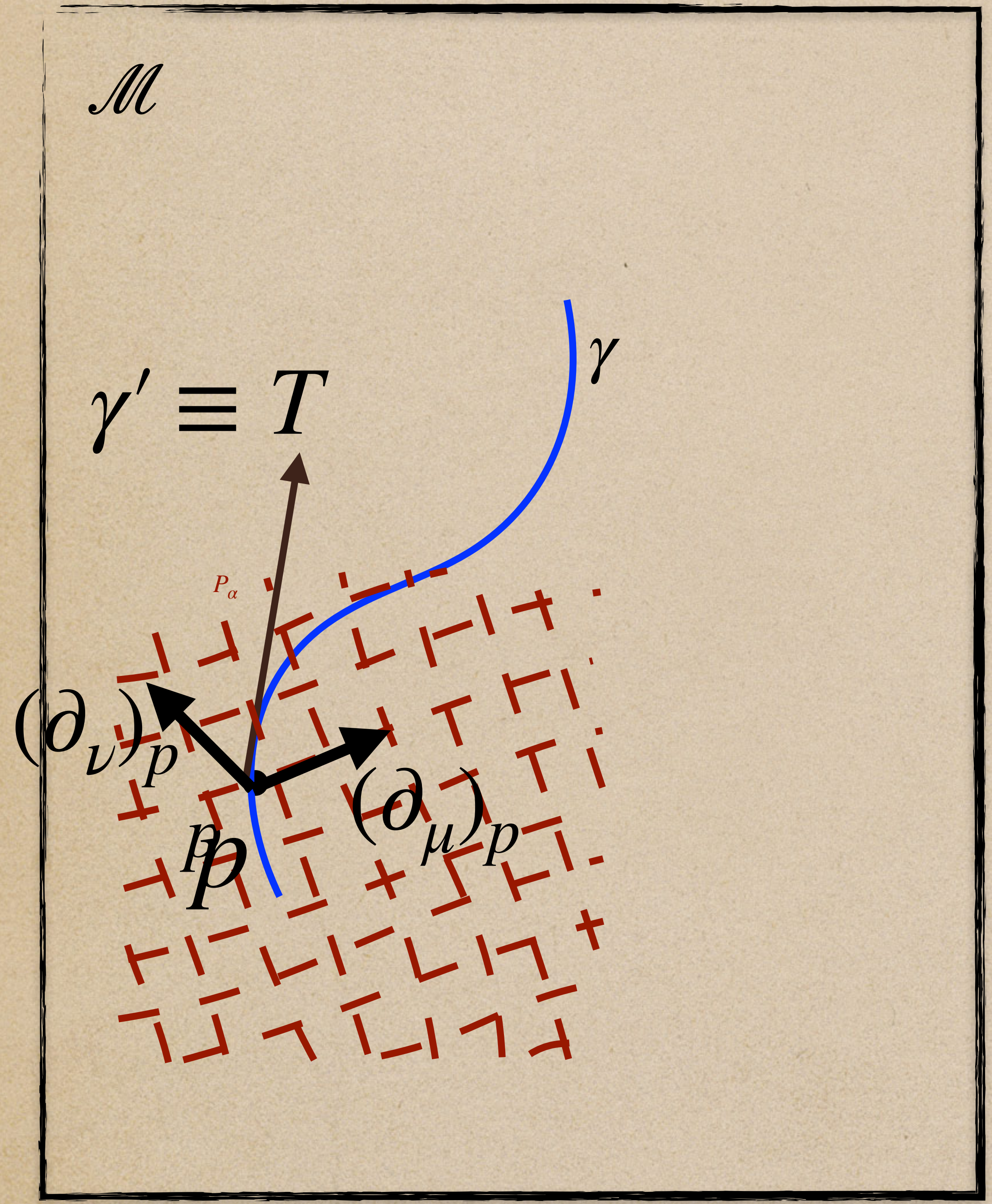
Vetores Tangentes



<u>Curvas:</u> Uma curva suave é uma função (C^∞) $\gamma : t \in I \subset \mathbb{R} \to \gamma(t) \in \mathscr{M}$. A tangente à γ em cada ponto $\gamma(t_0)$ é o vetor $\gamma' \equiv T \in T_{\gamma(t_0)}\mathscr{M}$ definido como

$$T(f) \equiv \left.\frac{df\left(\gamma(t)\right)}{dt}\right|_{t=t_0}$$

Vetores Tangentes



<u>Curvas:</u> Dado uma carta local qualquer ψ_α em p, que define coordenadas $\psi_\alpha(p) = (x^1, \cdots, x^n)$, temos que $\gamma(t) = \psi_\alpha^{-1}(x^1(t), \cdots, x^n(t))$:

$$T(f) \equiv \left.\frac{df\left(\gamma(t)\right)}{dt}\right|_{t=t_0} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx^\mu}{dt}(t_0)\frac{\partial\left(f \circ \psi_\alpha^{-1}\right)}{\partial x^\mu}(x^1(t_0), \cdots, x^n(t_0))$$

e, assim, pela definição de $(\partial_\mu)_p$ (onde tomamos $\gamma(t_0) = p$) temos

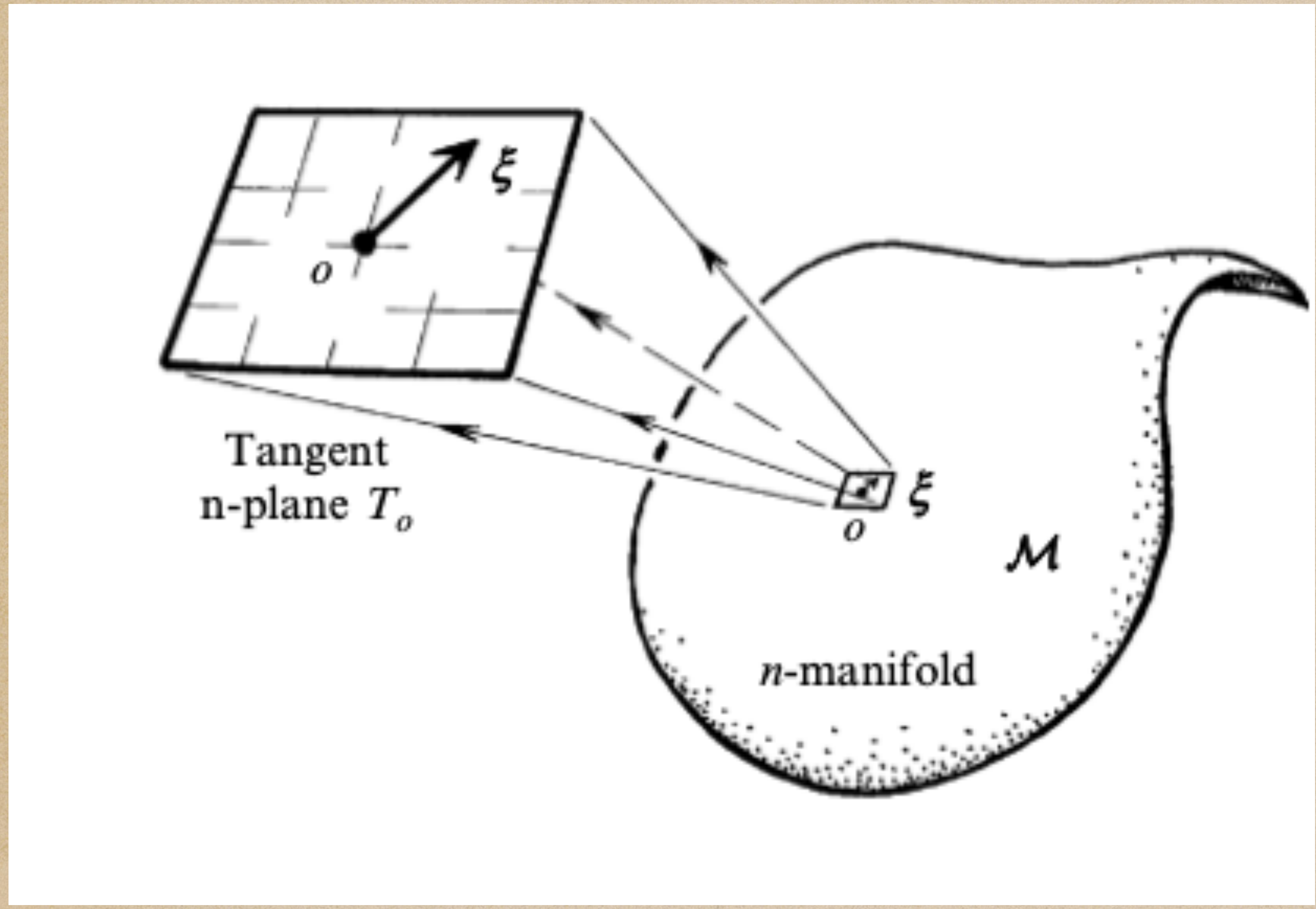
$$T(f) = \left[\sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx^\mu}{dt}(t_0)(\partial_\mu)_p\right] f, \forall f \in \mathscr{F}(\mathscr{M})$$

Portanto

$$\gamma'(t) \equiv T_t = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{dx^\mu(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_{\gamma(t)}$$

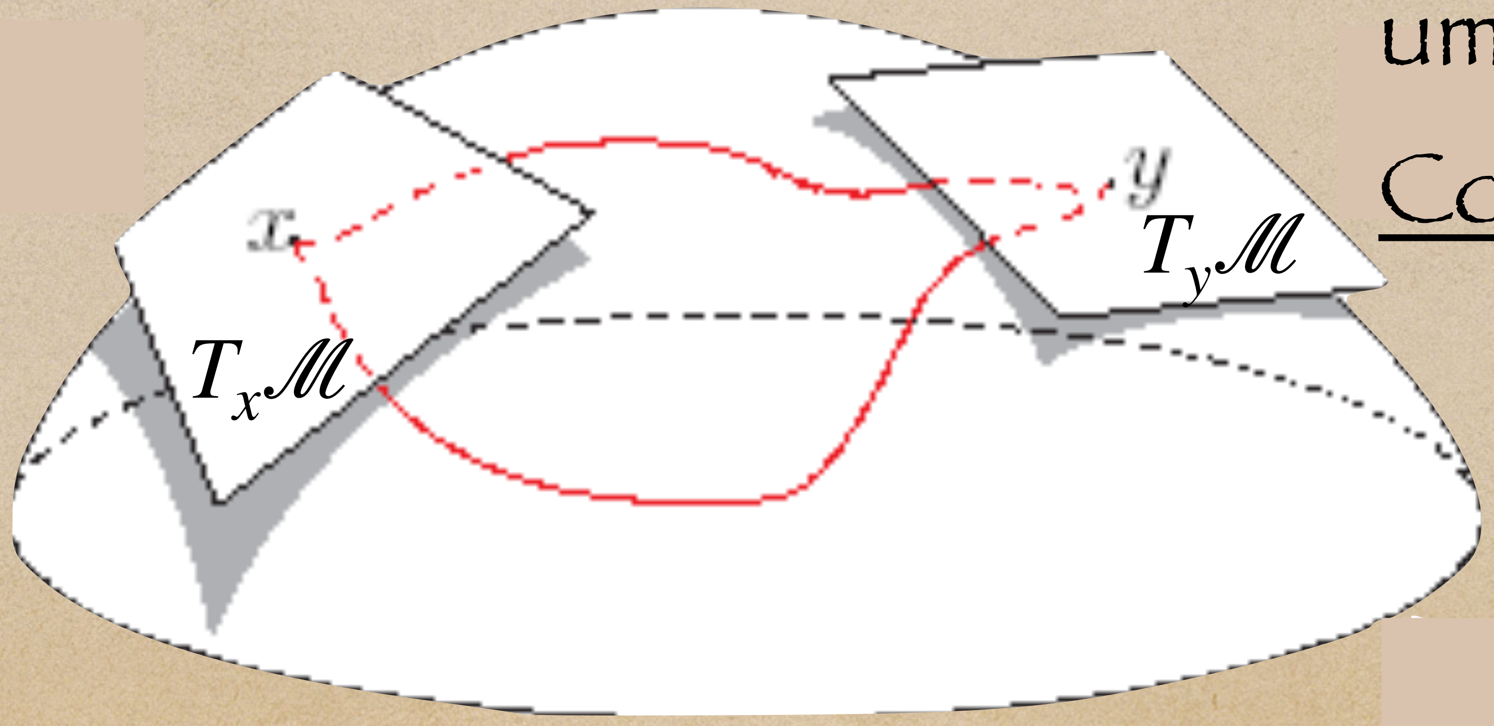
Note que, dado um $v \in T_p\mathscr{M}$ qualquer, sempre podemos construir uma curva cuja tangente em p é v, temos que os $\left\{(\partial_\mu)_p : \mu = 1, \cdots, n\right\}$ geram $T_p\mathscr{M}$, i.e., $v = \sum_\mu v^\mu (\partial_\mu)_p$.

Derivada Covariante

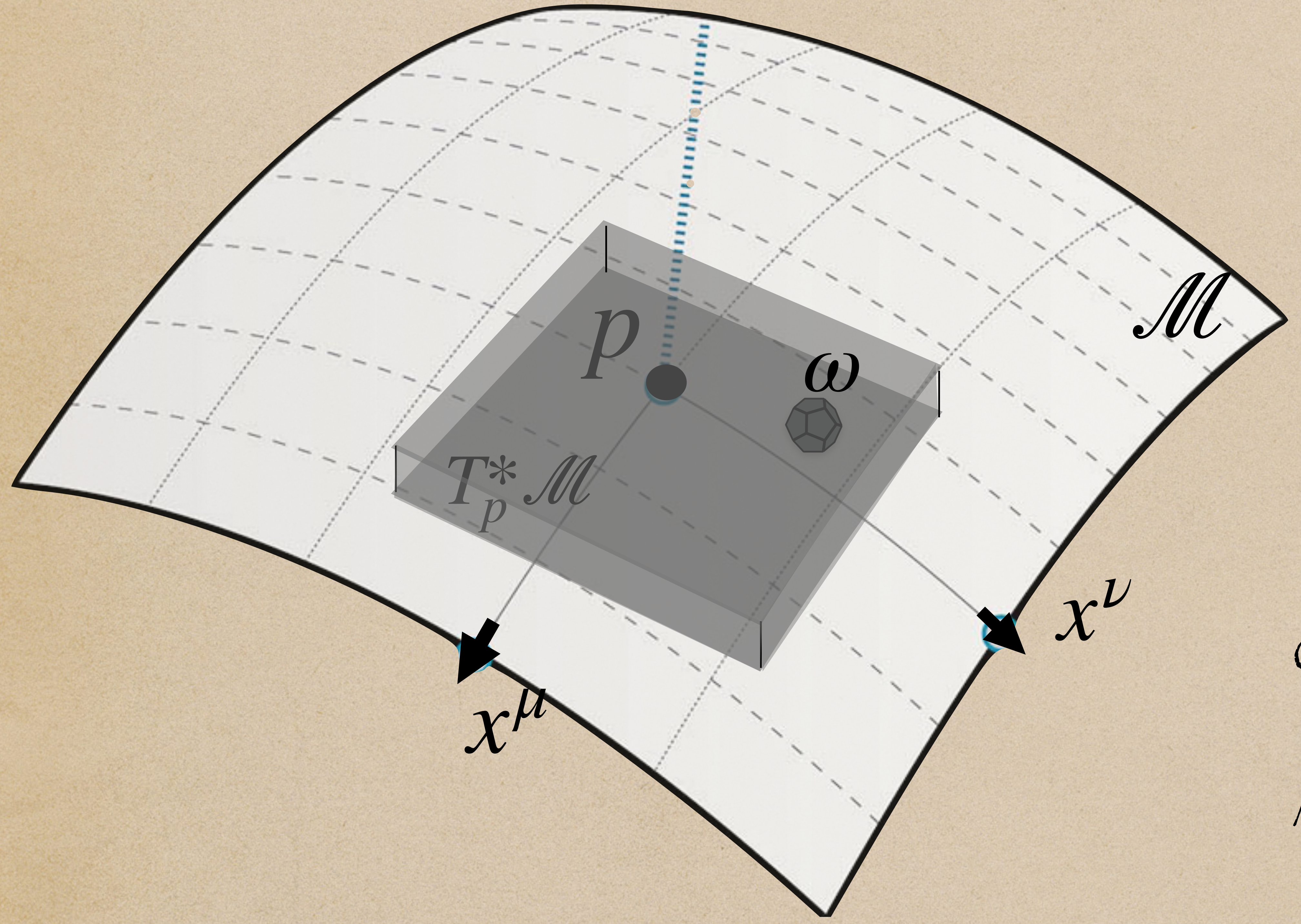


Vetor tangente: Cada ponto p tem associado um espaço tangente $T_p\mathcal{M}$ e não há conexão entre espaços tangentes diferentes (só faz sentido somar vetores e multiplica-los por escalares dentro do mesmo espaço tangente).

Para ``relacionarmos'' vetores tangentes em espaços-tangentes diferentes (em particular, para calcularmos taxas de variações de campos tensoriais em diferentes pontos para diferentes direções), precisamos fornecer uma estrutura extra para a variedade, a chamada Derivada Covariante



Covetores (vetores duais)



<u>Base:</u> $\left\{\partial_1, \cdots, \partial_n\right\} \subset T_p\mathscr{M}$

$$v \equiv \sum_\alpha v^\mu \partial_\mu$$

<u>Espaço Cotangente</u>

$$T_p^*\mathscr{M} = \left\{\omega : T_p\mathscr{M} \to \mathbb{R} \,|\, \omega : \text{funcional linear}\right\}$$

Espaço vetorial de funções lineares que "pegam" vetores em $T_p\mathscr{M}$ e transformam em números reais (seus elementos são chamados vetores duais—ou co-vetores, vetores covariantes ou ainda 1-formas em p). Ou seja, $\omega : v \in T_p\mathscr{M} \to \omega(v) \in \mathbb{R}$ com $\omega(\alpha v + \beta u) = \alpha\omega(v) + \beta\omega(u),\ v, u \in T_p\mathscr{M}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

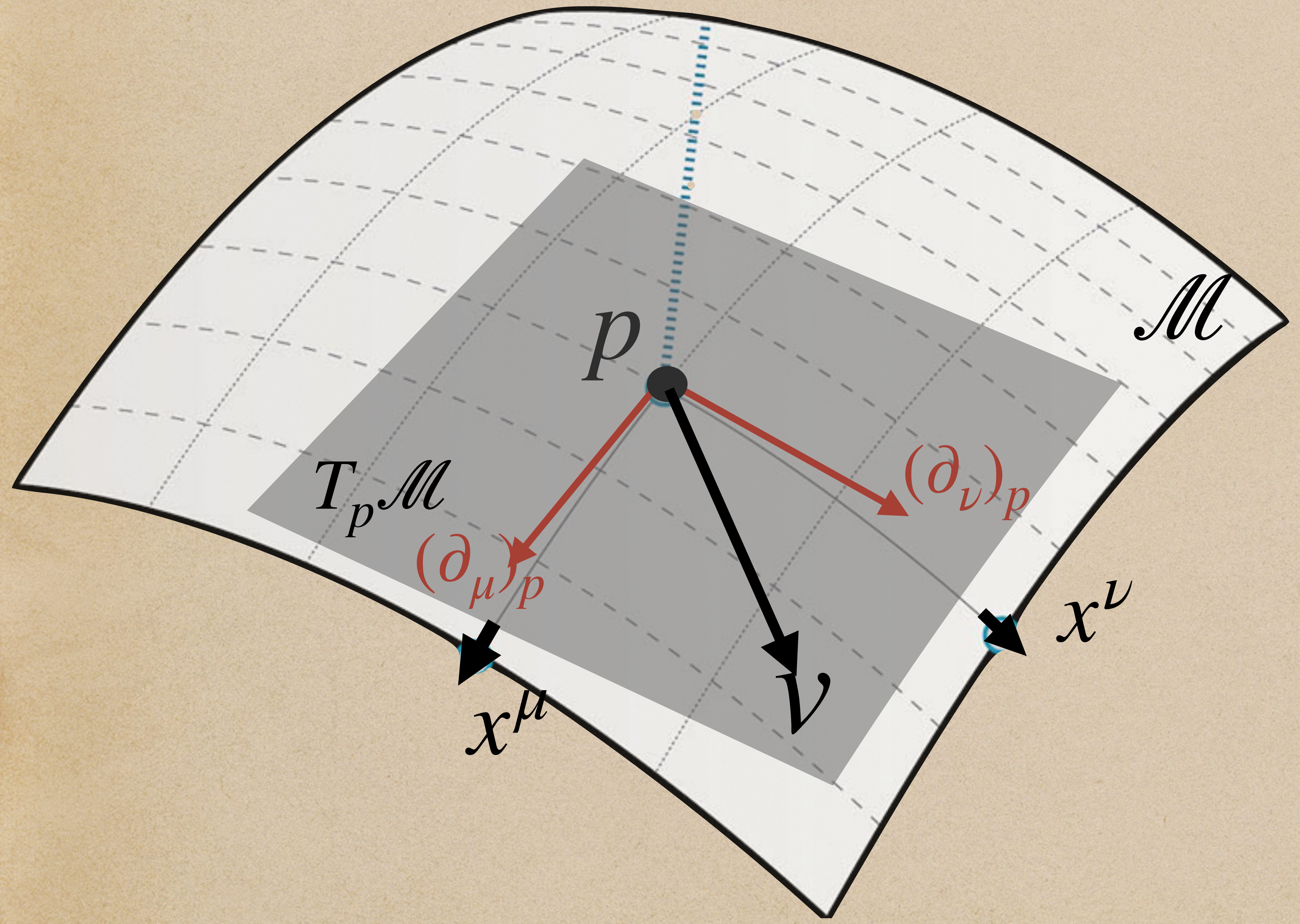
$\left\{dx_p^1, \cdots, dx_p^n\right\}$ com $dx^\alpha\left(\partial_\beta\right) \equiv \delta^\alpha_\beta$, forma uma base de $T_p^*\mathscr{M}$ o que implica que dado um $\omega \in T^*\mathscr{M}$, temos que $\omega = \sum_\alpha \omega_\alpha dx_p^\alpha$.

Além disso note que , dando $v \in T_p\mathscr{M}$, temos

$$\varepsilon^\alpha(v) = \varepsilon^\alpha\left(\sum_\beta v^\beta e_\beta\right) \equiv \sum_\beta v^\beta \varepsilon^\alpha\left(e_\beta\right) = v^\alpha \text{ e, assim:}$$

$$\omega(v) = \sum_\alpha \omega_\alpha \varepsilon_p^\alpha(v) = \sum_\alpha \omega_\alpha v^\alpha$$

O Tensor Métrico

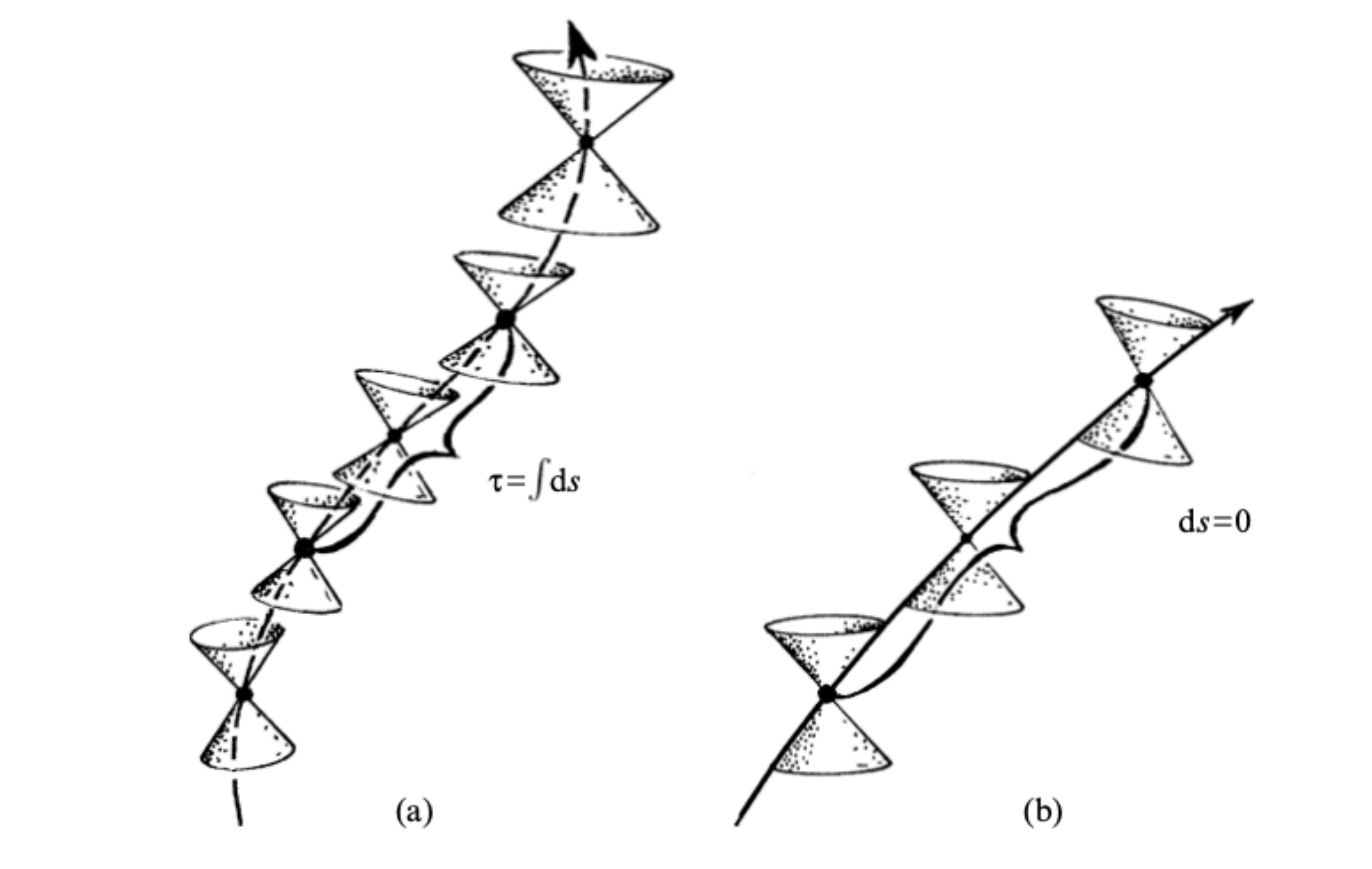


Tal isomorfismo é definido via: $v \in T_p\mathscr{M} \to \omega_v \equiv g_p(v, \cdot\,) \in T_p^*\mathscr{M}$ [cuja inversa é dada por $\omega \in T_p^*\mathscr{M} \to v_\omega \equiv g_p^{-1}(\omega, \cdot\,) \in T_p\mathscr{M}$]. As componentes de $\omega_v \equiv g_p(v, \cdot\,)$ em uma base $\{\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n\} \subset T_p^*\mathscr{M}$ (dual à base $\{e_1, \cdots, e_n\} \subset T_p\mathscr{M}$ de $T_p\mathscr{M}$) é dada por:

$$(\omega_v)_\mu \equiv \omega_v(e_\mu) \equiv g_p\left(\sum_\sigma v^\sigma e_\sigma, e_\mu\right) = \sum_\sigma g_{\mu\sigma} v^\sigma,$$

onde usamos que $v = \sum_\mu v^\mu e_\mu$. É comum denotar $(\omega_v)_\mu$ por v_μ e, assim, $v_\mu = \sum_\sigma g_{\mu\sigma} v^\sigma$. Analogamente, mostra-se que $v_\omega \equiv g_p^{-1}(\omega, \cdot\,)$ tem componentes $(v_\omega)^\mu \equiv \omega^\mu = \sum_\sigma g^{\mu\sigma}\omega_\sigma$

Espaços-Tempos Gerais



Espaço-Tempo: $(\mathscr{M}, g)$

Distância espaço temporal entre pontos vizinhos $\mathscr{P}$ e

$\mathscr{Q} = \mathscr{P} + d\mathscr{P}$

$ds^2_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} = \sum_{\mu\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$: $\{x^\mu\}$ coordenadas arbitrárias em $\mathscr{M}$.

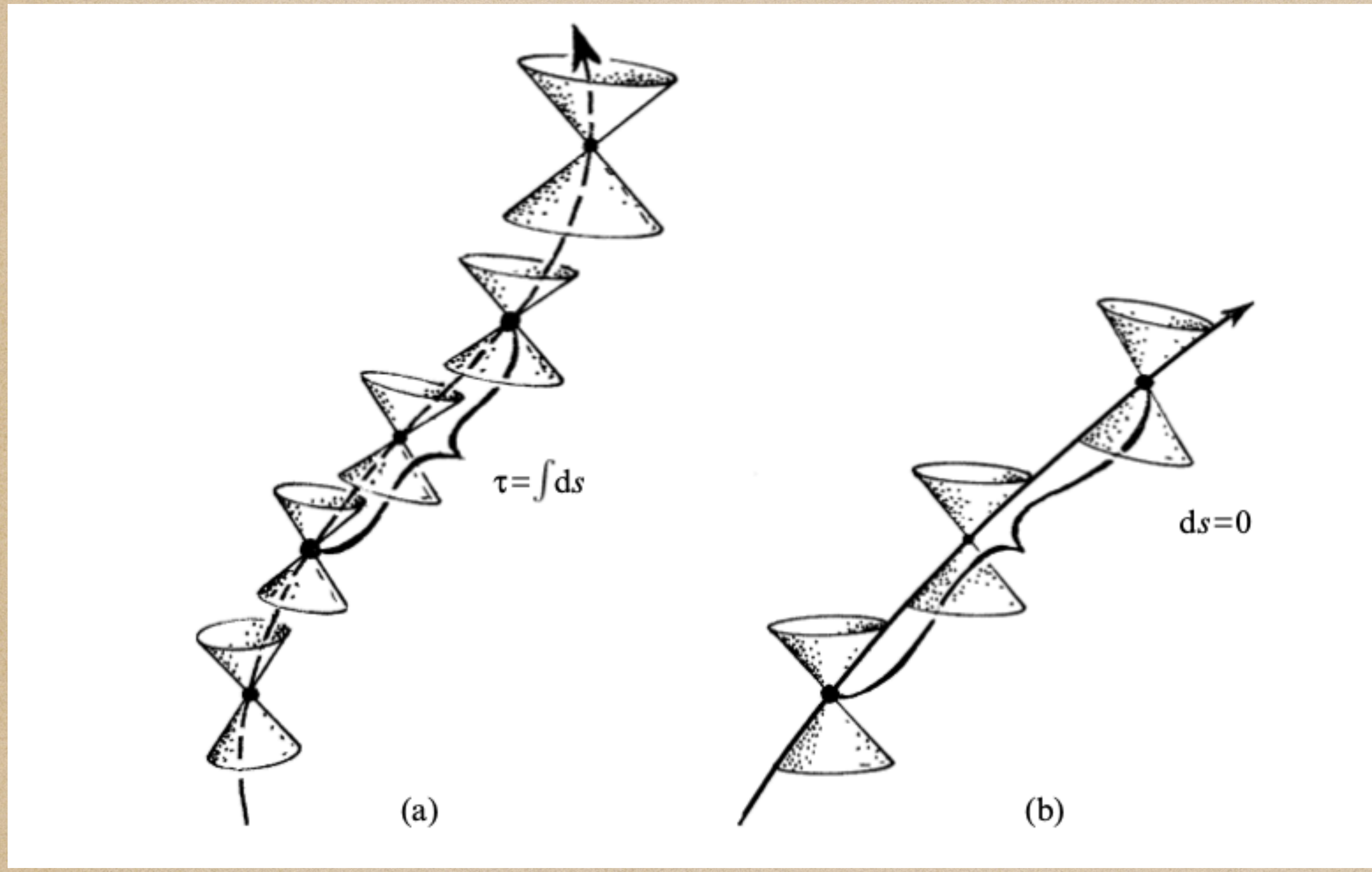
Curva γ em $\mathscr{M}$. Deslocamento ao longo da curva $dx^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} d\lambda$

$ds^2_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} < 0 \rightarrow$ Curva tipo-tempo

$ds^2_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} = 0 \rightarrow$ Curva tipo-luz

$ds^2_{\mathscr{P}\mathscr{Q}} > 0 \rightarrow$ Curva tipo-espaço

Espaços-Tempos Gerais



Para curvas tipo-tempo definimos o tempo-próprio τ como:

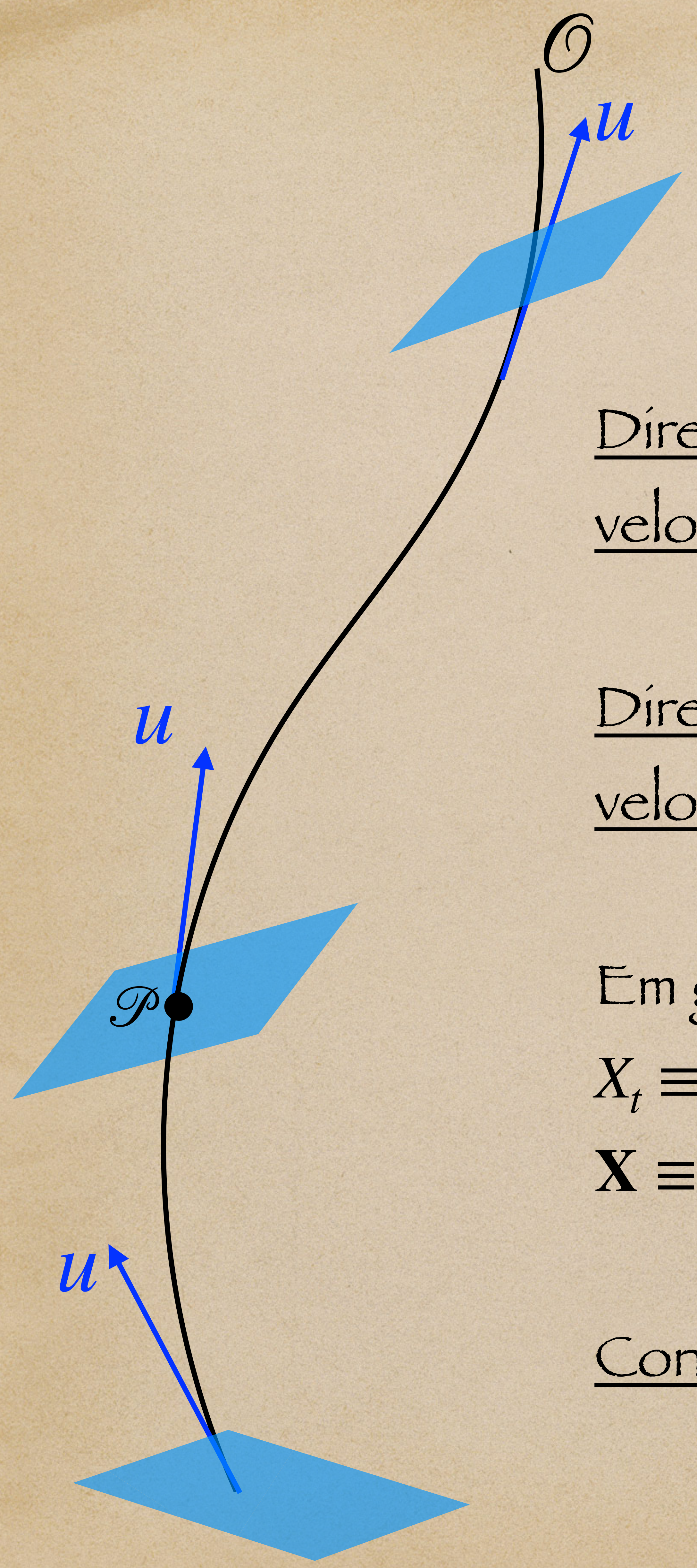
$$\tau = \int_\gamma \sqrt{-ds^2} = \int_{\lambda_\mathscr{P}}^{\lambda_\mathscr{Q}} \sqrt{-\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda}}\, d\lambda$$

Se a curva γ é parametrizada pelo tempo-próprio τ então

$$u = \frac{d\gamma}{d\tau} = \sum_\mu \frac{dx^\mu}{d\tau} e_\mu \text{ (no evento } \mathscr{P}\text{)}, \; u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

é chamada de 4-velocidade. Nesse caso

$$g(u,u) = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu \equiv \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = -1$$

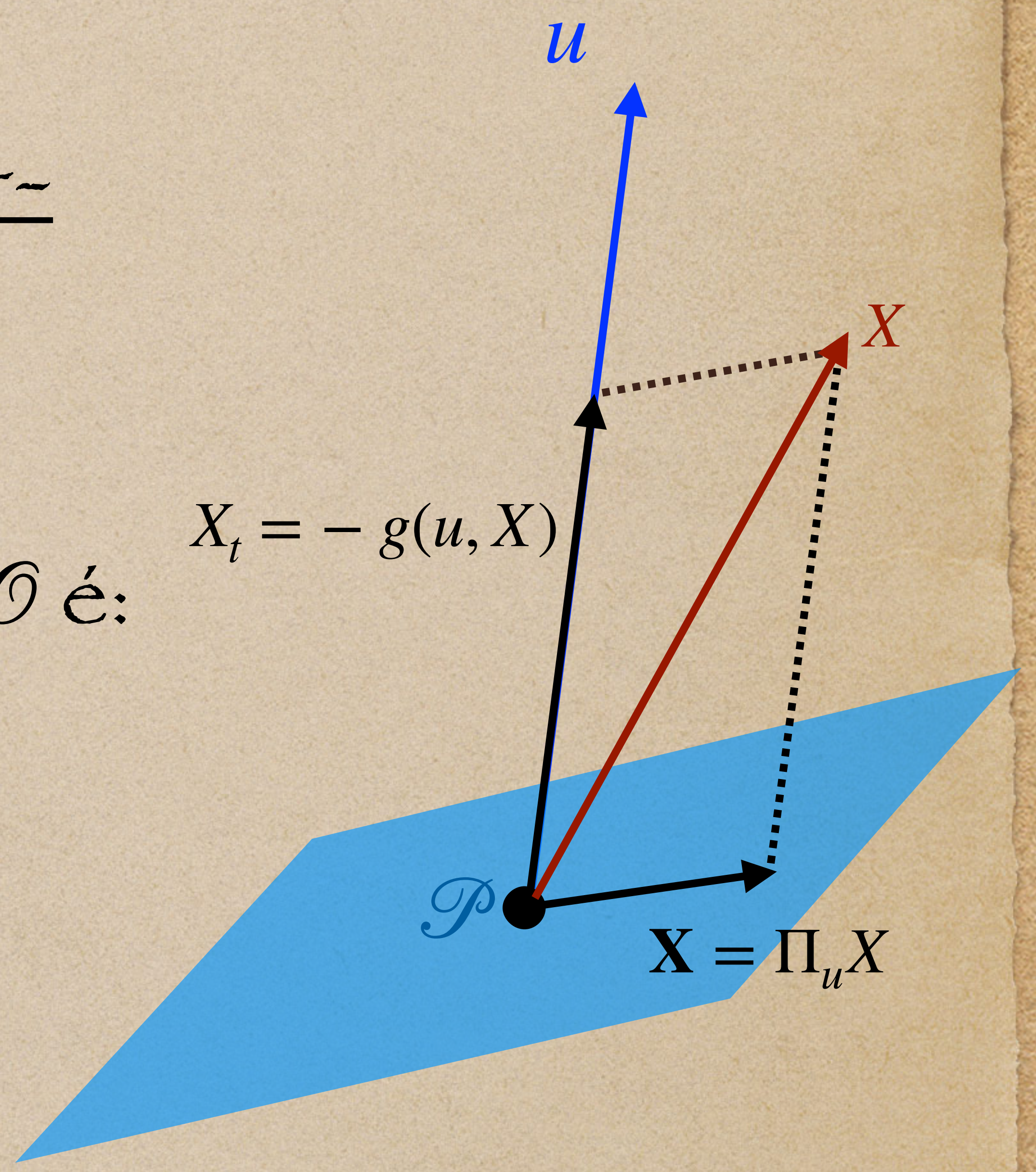


Direções ``temporais" no evento $\mathcal{P}$ como visto por um observador com 4-velocidade u: Vetores paralelos à u

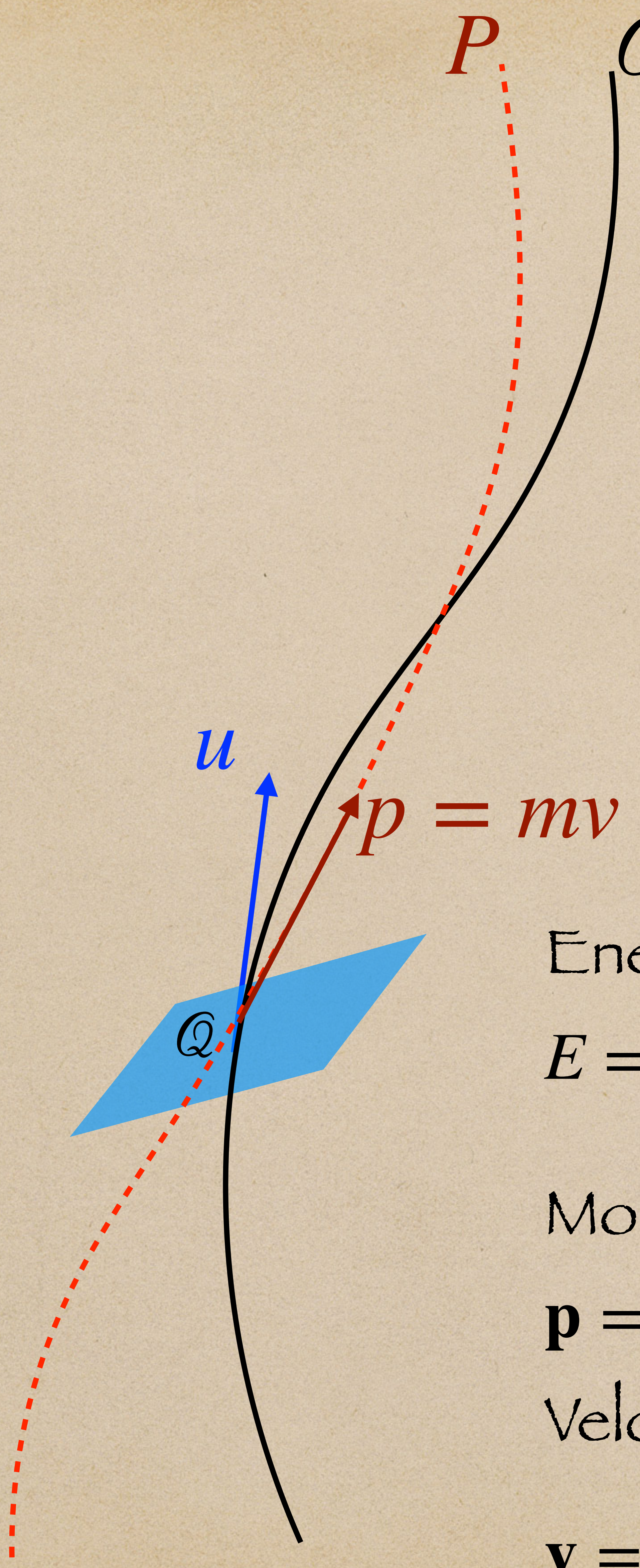
Direções "espaciais" no evento $\mathcal{P}$ associadas a um observador com 4-velocidade u: 4-vetores $\mathbf{l}$ em $\mathcal{P}$ tal que $g\,(u, \mathbf{l}) = 0$.

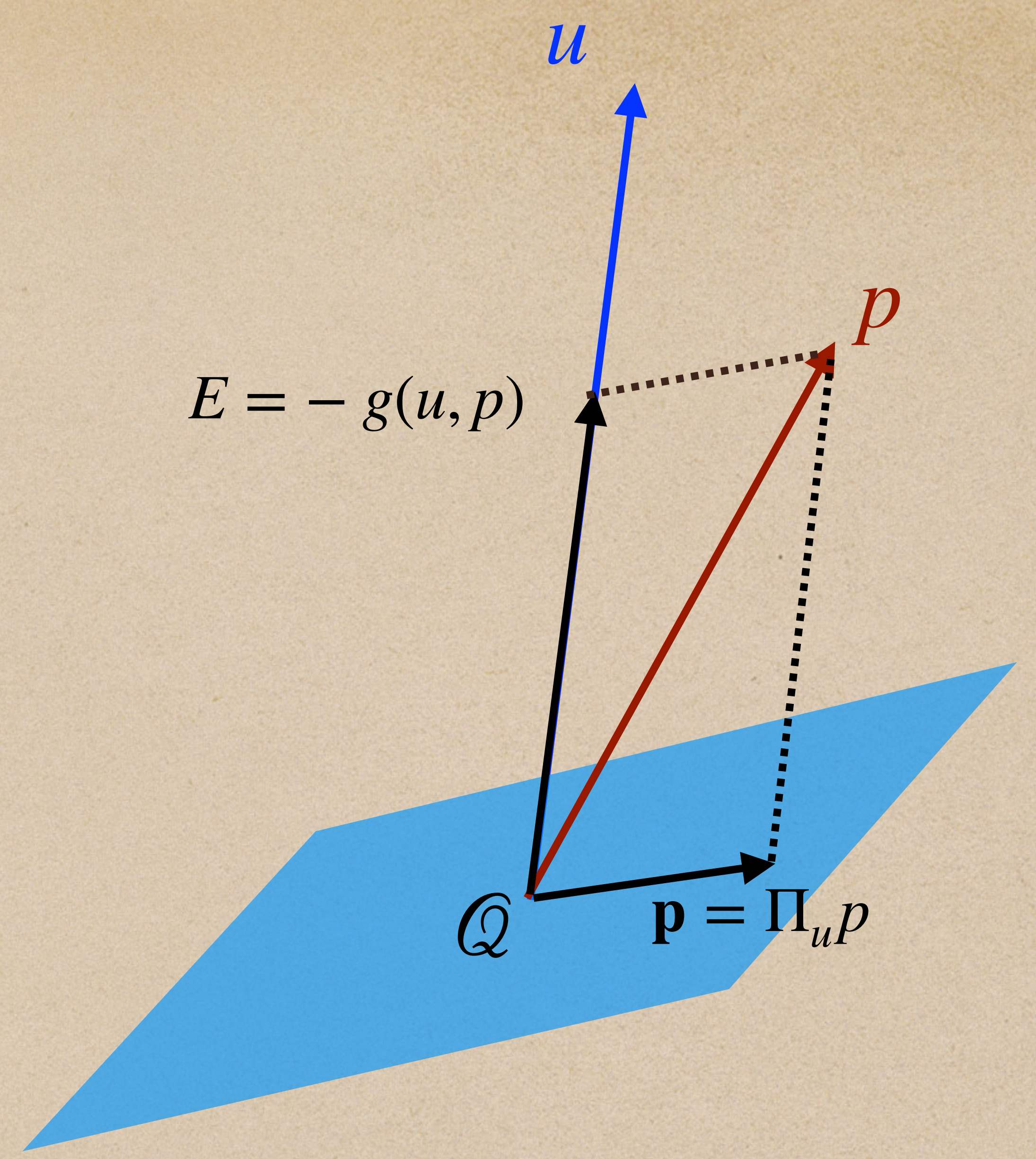
Em geral, se X é um 4-vetor, sua componente temporal com relação a $\mathcal{O}$ é:
$X_t \equiv -\,g\,(u, X)\,u$ e sua componente espacial é da forma
$\mathbf{X} \equiv \Pi_u X \equiv g\,(u, X)\,u + X$

Cone de Luz em $\mathcal{P}$: 4-vetores k em $\mathcal{P}$ tal que $g\,(k, k) = 0$



$$X \equiv -\,g\,(u, X)\,u + \Pi_u X$$





Energia da partícula P (no evento $\mathcal{Q}$) como medida pelo observador $\mathcal{O}$

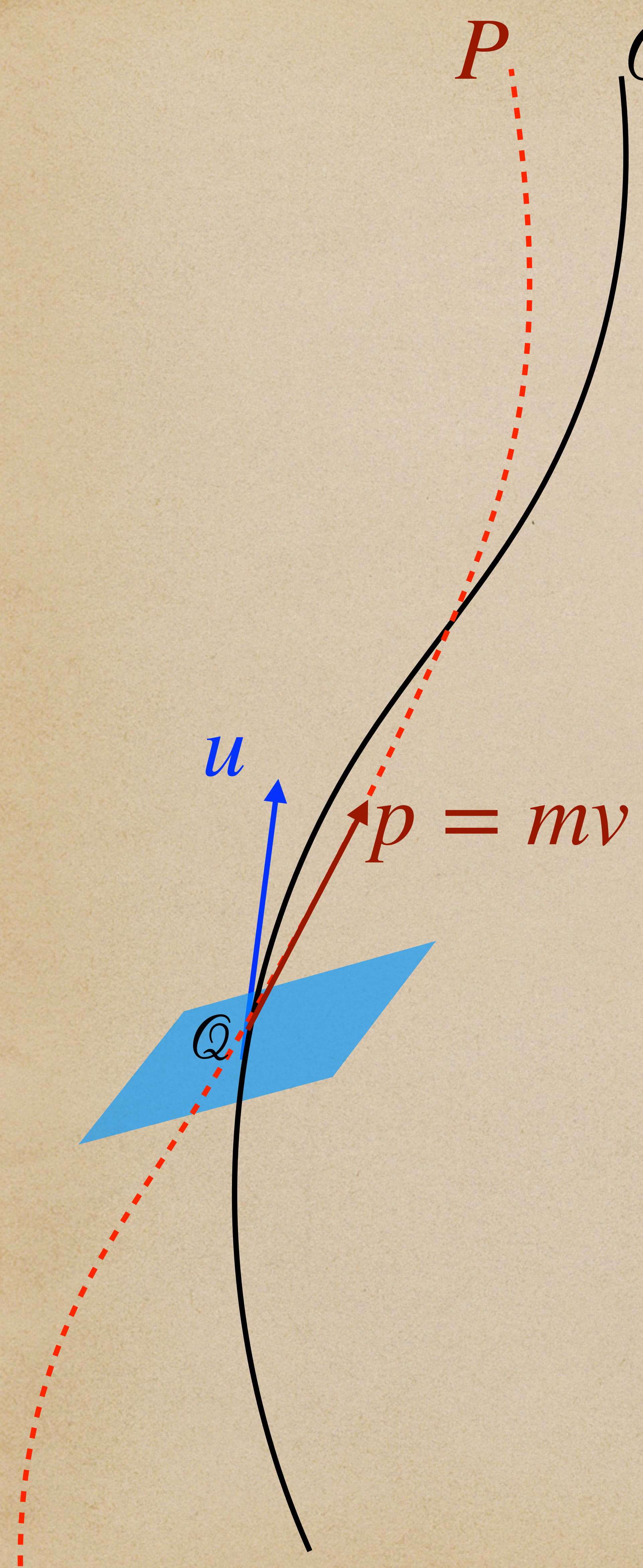
$$E = -g(u,p) = -\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} u^\mu p^\nu$$

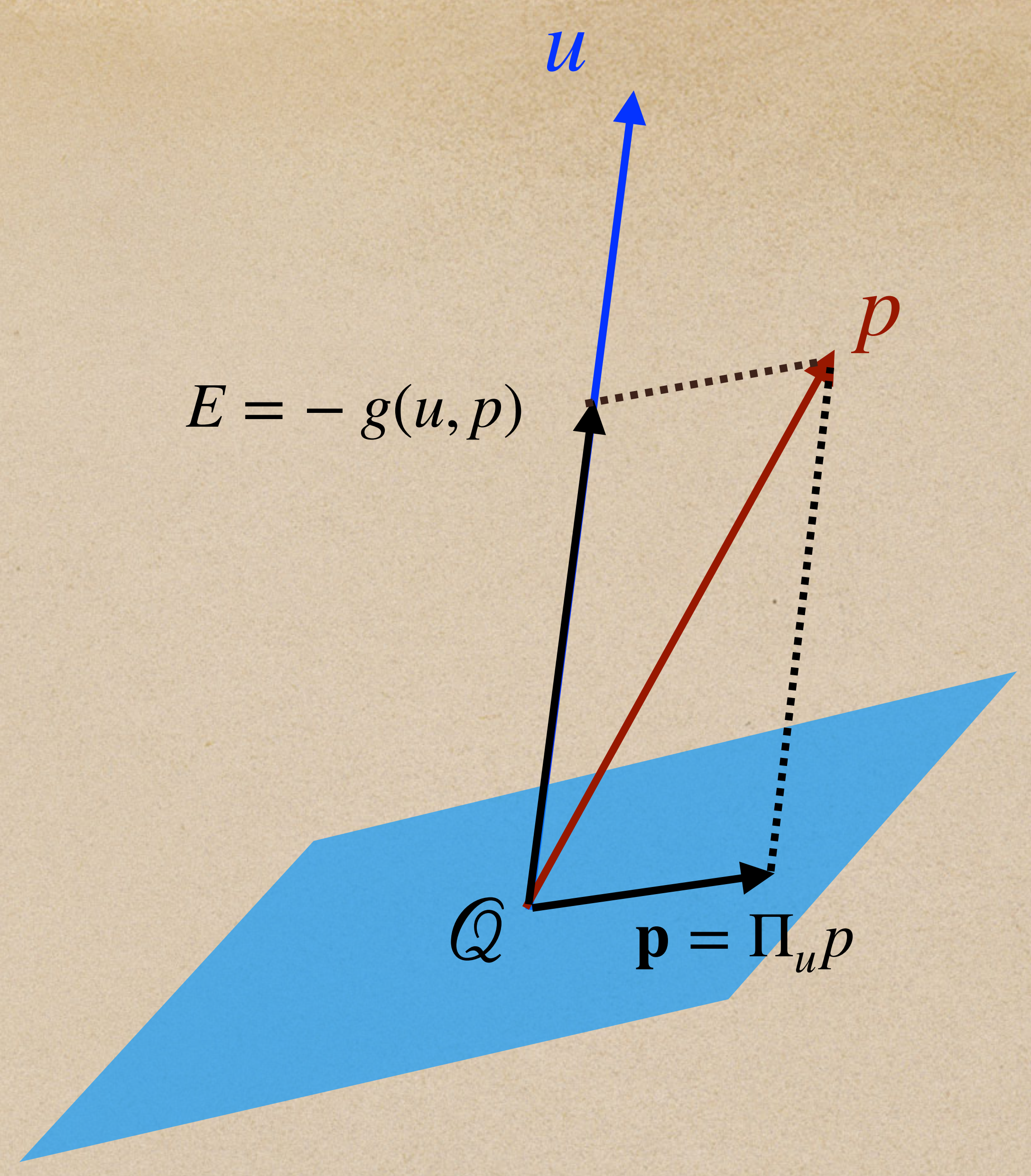
Momento espacial da partícula P (no evento $\mathcal{Q}$) como medido pelo observador $\mathcal{O}$

$$\mathbf{p} = \Pi_u p$$

Velocidade espacial da partícula P (no evento $\mathcal{Q}$) como medida pelo observador $\mathcal{O}$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{p}}{E} = \frac{\Pi_u v}{-g(u,v)}, \; p = mv$$





Podemos decompor a 4-velocidade v como

$v = -g(u,v)u + \Pi_u v = -g(u,v)(u + \mathbf{v})$. Como $g(v,v) = -1 \to -g(u,v) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} \equiv \gamma(\mathbf{v})$

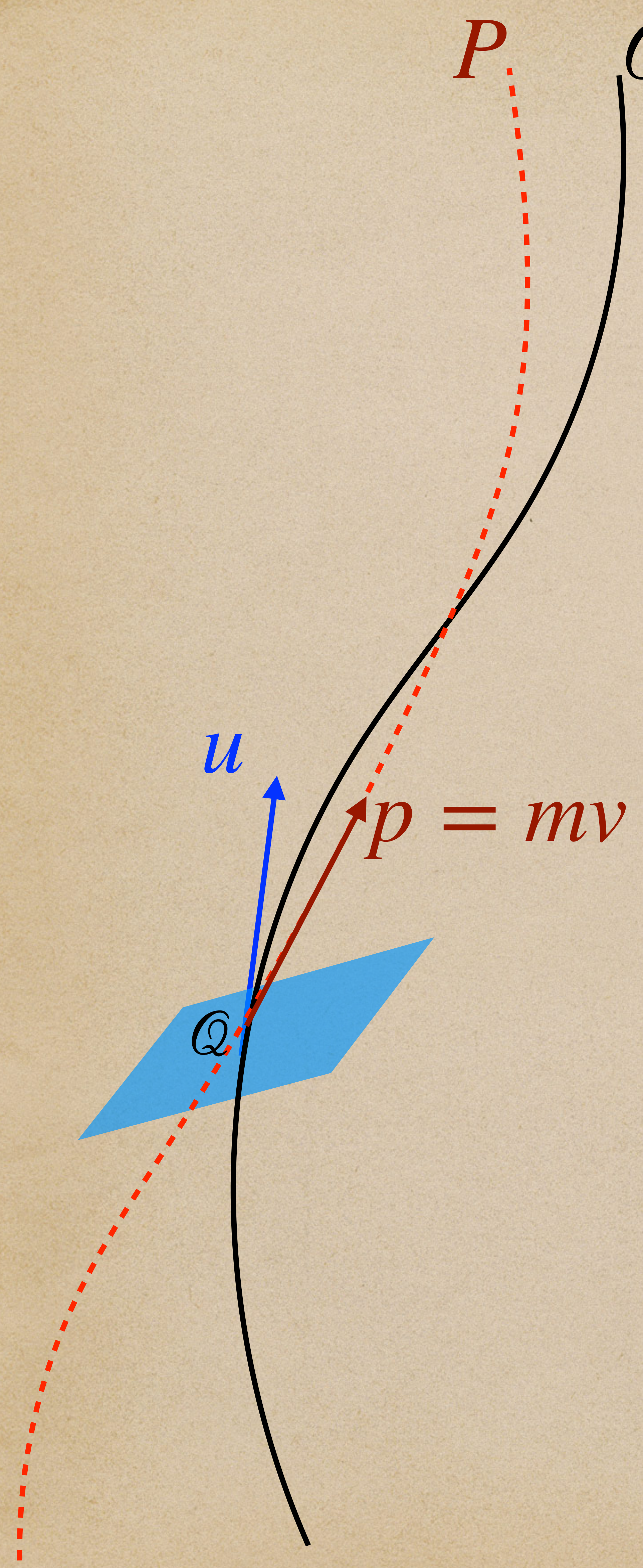
Usando a decomposição $v = \gamma(\mathbf{v})(u + \mathbf{v})$ e que $p = mv$ temos $p = Eu + \Pi_u p = \left(Eu + \mathbf{p}\right)$

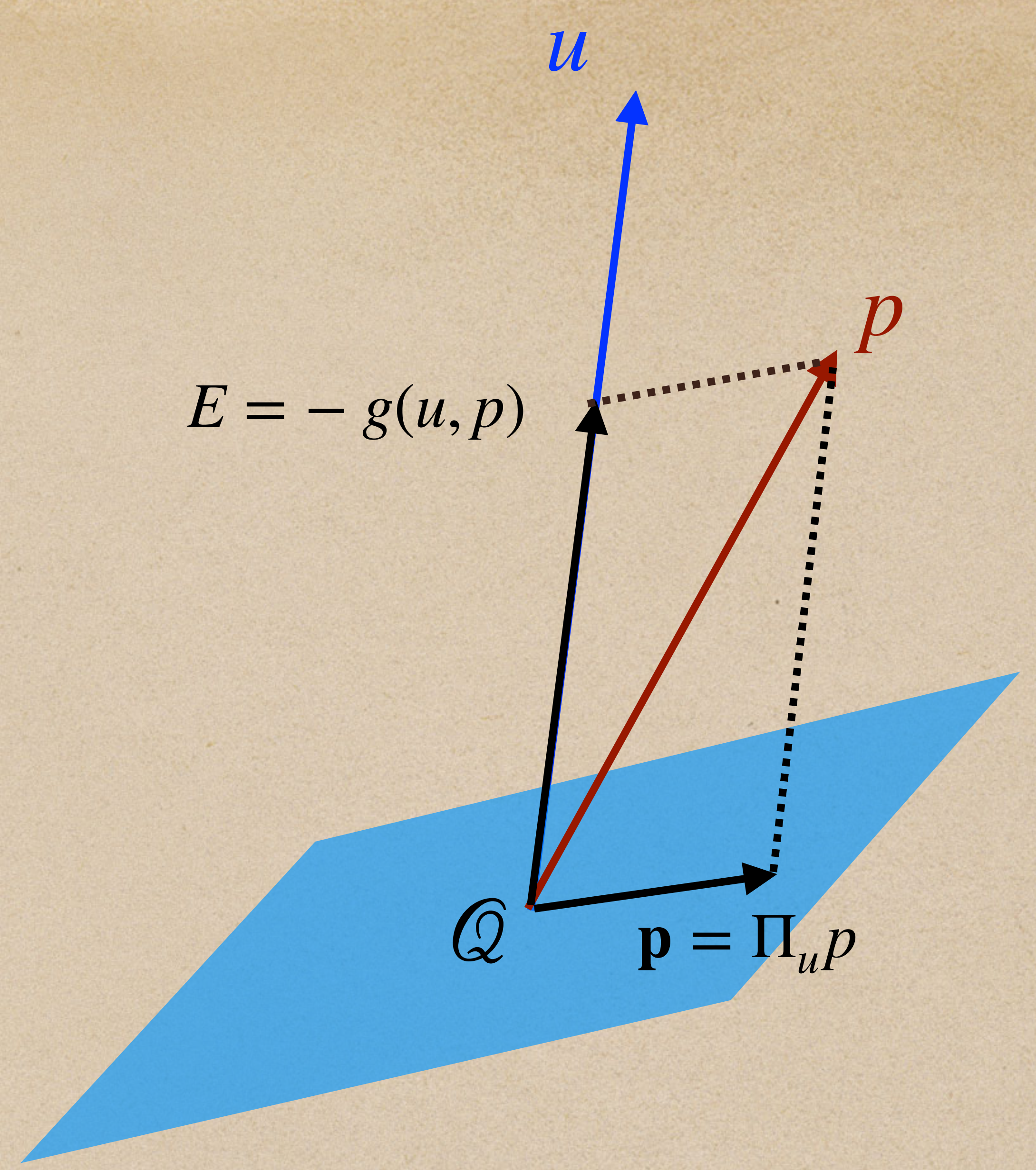
com a energia da partícula P (no evento Q) como medido pelo observador $\mathcal{O}$ sendo

$E = -g(u,p) = \gamma(\mathbf{v})m$

e o momento espacial da partícula P (no evento Q) como medido pelo observador $\mathcal{O}$

$\mathbf{p} = \gamma(\mathbf{v})m\mathbf{v}$





Podemos decompor a 4-velocidade v como

$v = -g(u, v)u + \Pi_u v = -g(u, v)(u + \mathbf{v})$. Como $g(v, v) = -1 \rightarrow -g(u, v) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \mathbf{v}^2}} \equiv \gamma(\mathbf{v})$

Usando a decomposição $v = \gamma(\mathbf{v})(u + \mathbf{v})$ e que $p = mv$ temos $p = Eu + \Pi_u p = (Eu + \mathbf{p})$

com a energia da partícula P (no evento $\mathcal{Q}$) como medido pelo observador $\mathcal{O}$ sendo

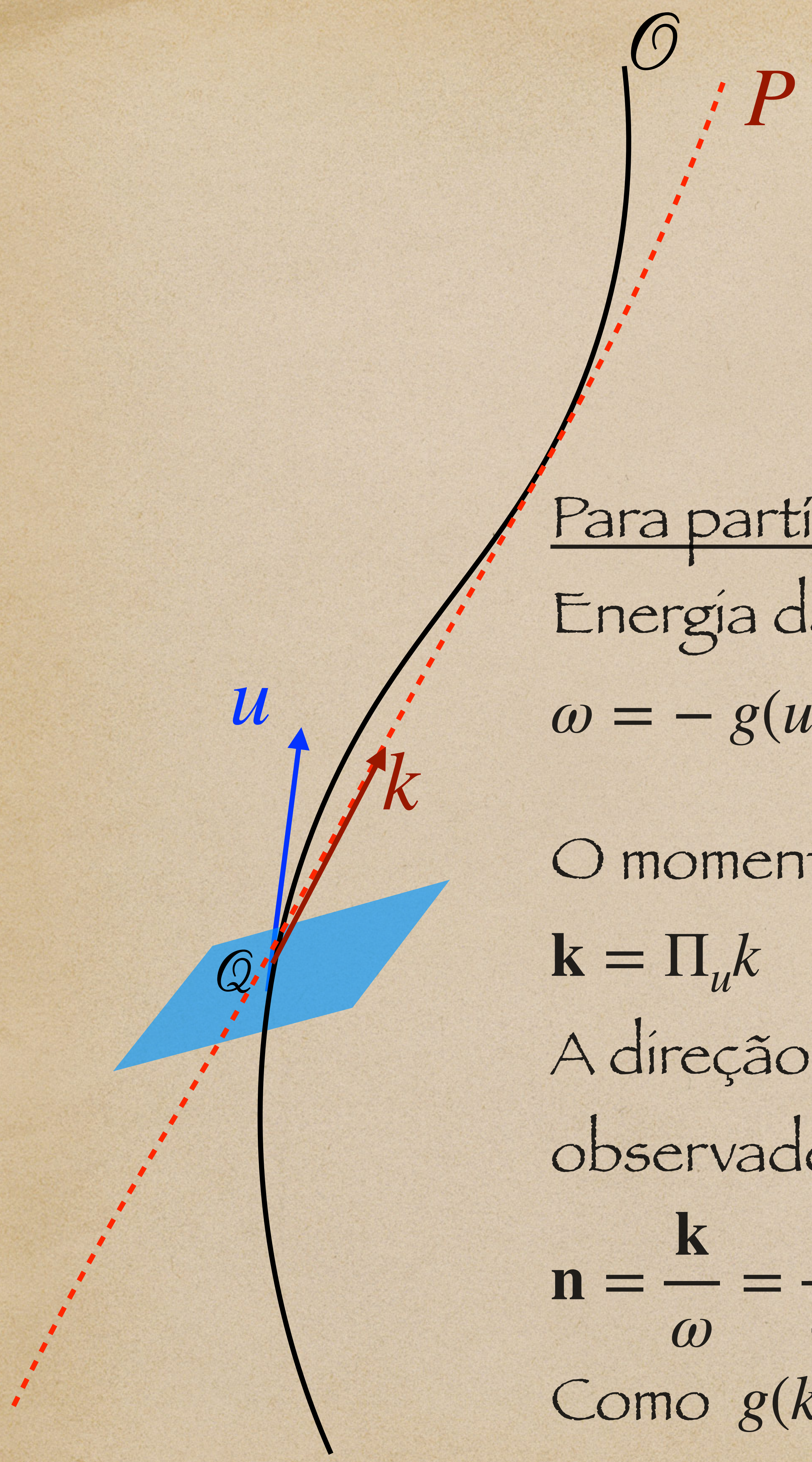
$E = -g(u, p) = \gamma(\mathbf{v})m$

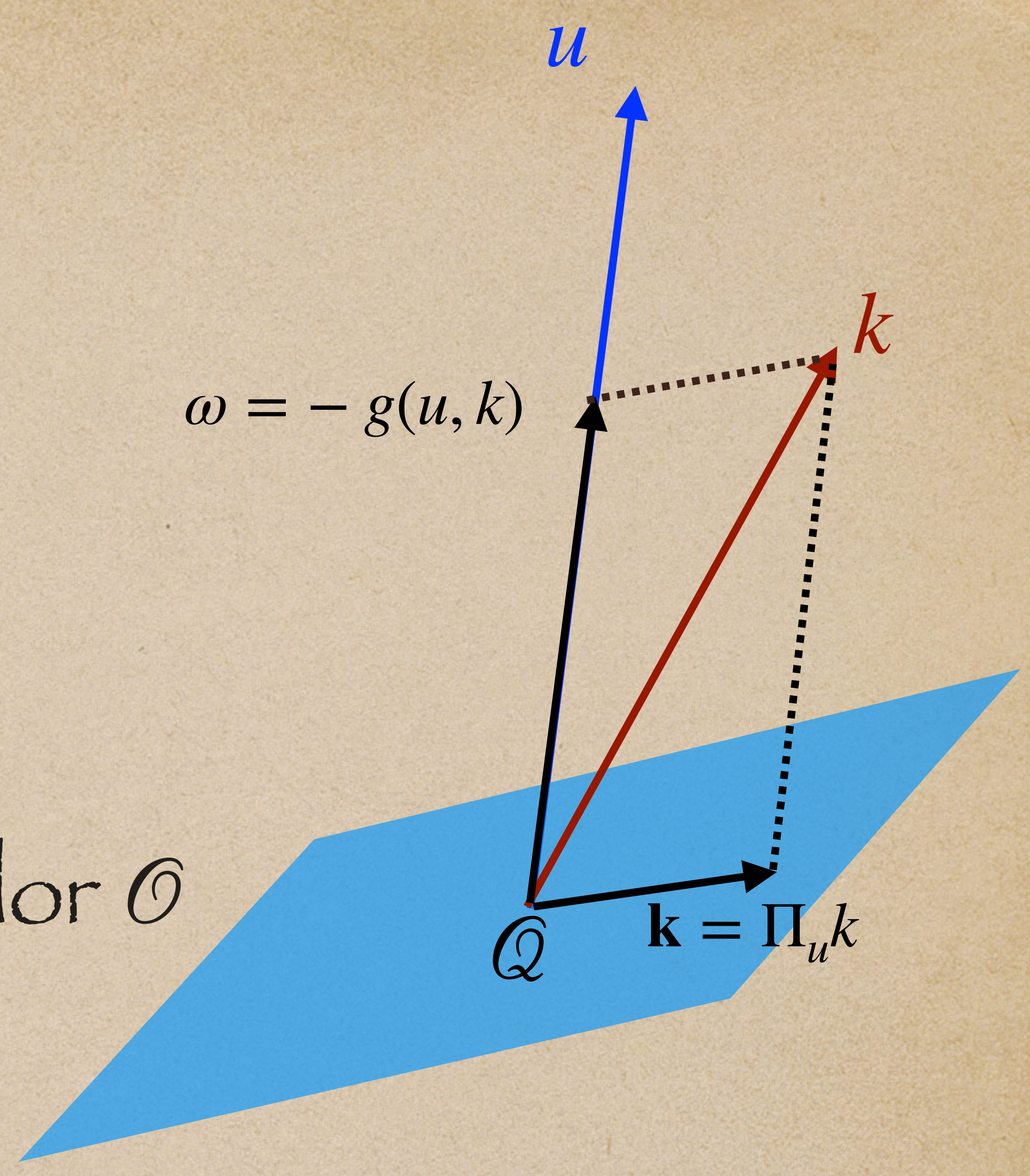
e o momento espacial da partícula P (no evento $\mathcal{Q}$) como medido pelo observador $\mathcal{O}$

$\mathbf{p} = \gamma(\mathbf{v})m\mathbf{v}$

Note que $g(p, p) = g(mv, mv) = -m^2$ e $g(p, p) = g(Eu + \mathbf{p}, Eu + \mathbf{p}) = -E^2 + \mathbf{p}^2$

Logo: $E = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$





<u>Para partículas sem massa com 4-vetor de onda k:</u>

Energia da partícula P (no evento 𝒬) como medida pelo observador 𝒪

$$\omega = -g(u,k) = -\sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} u^\mu k^\nu$$

O momento espacial da partícula P (no evento 𝒬) como medida pelo observador 𝒪 é:

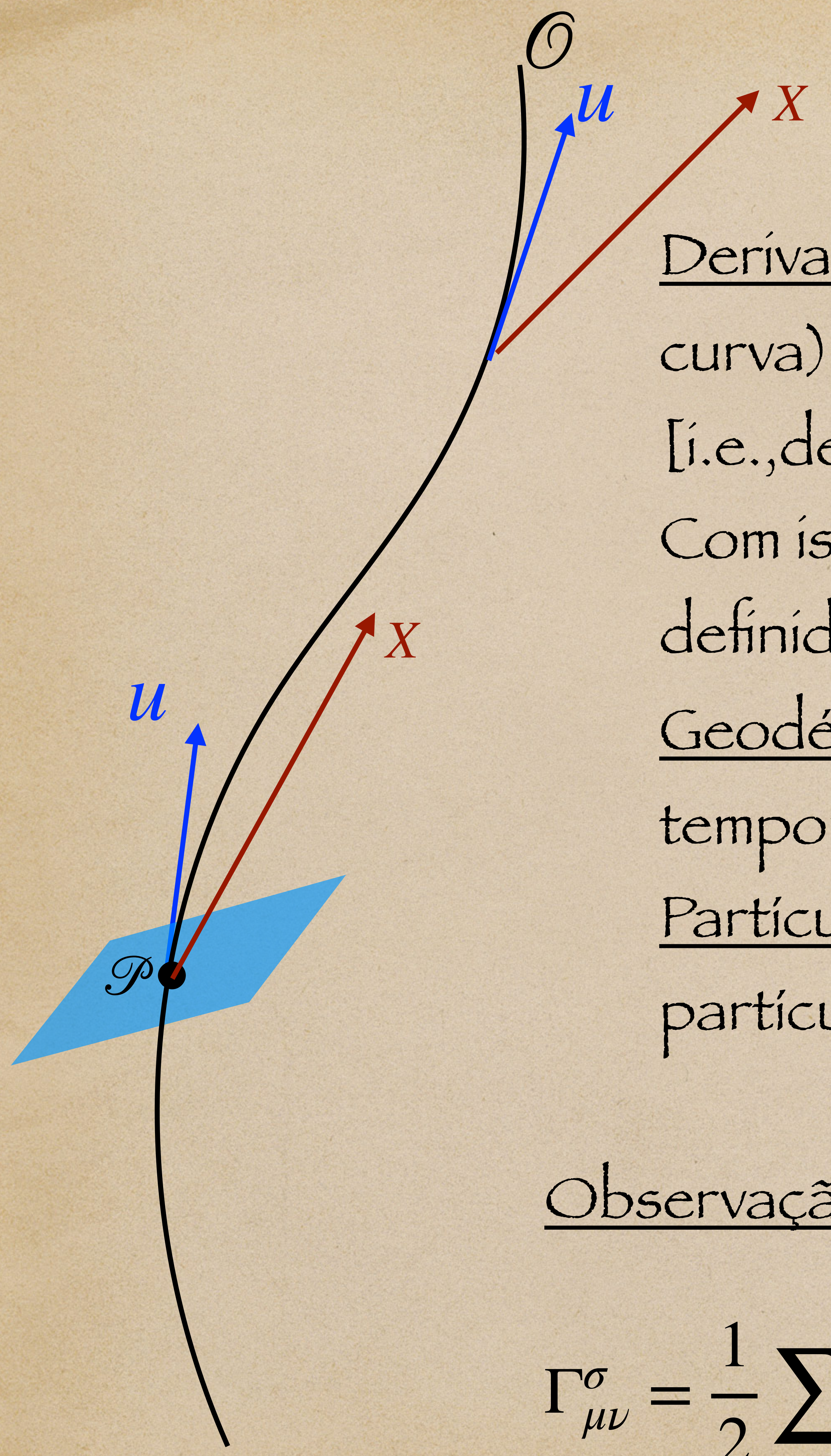
$$\mathbf{k} = \Pi_u k$$

A direção de espacial propagação da partícula P (no evento 𝒬) como medido pelo observador 𝒪

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{\omega} = \frac{\Pi_u k}{-g(u,k)}.$$

Como $g(k,k) = 0$ e $k = -g(u,k)u + \Pi_u k = \omega\,(u + \mathbf{n})$ temos

$\mathbf{n}^2 = g(\mathbf{n},\mathbf{n}) = 1 \to 1 = |\mathbf{n}| = \dfrac{|\mathbf{k}|}{\omega}$ e portanto temos a relação de dispersão usual $\omega = |\mathbf{k}|$



Derivada covariante na direção u: D_u (leva 4-vetores em 4-vetores para cada ponto da curva). Ela satisfaz (entre outras propriedades): $D_u g(X,Y) = g\left(D_u X, Y\right) + g\left(X, D_u Y\right)$ [i.e.,derivada da métrica é zero]

Com isso, podemos definir uma noção de paralelismo ao longo da curva. Um campo X definido sobre a curva é propagado paralelamente se $D_u X = 0$

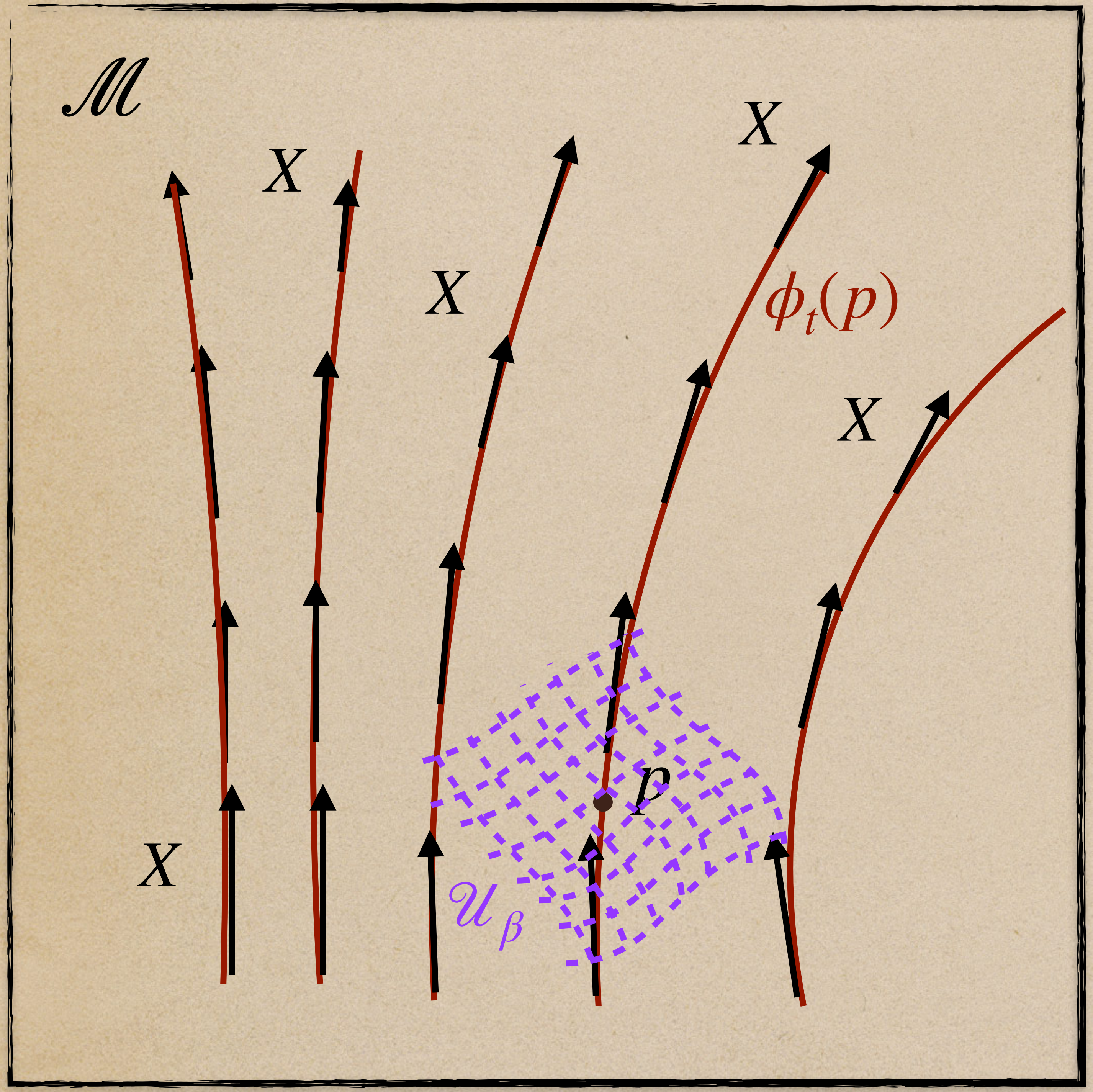
Geodésicas: Curvas auto-paralelas $D_u u = 0$ ("curvas mais retas possíveis no espaço-tempo")

Partículas livres (com ou sem massa): Movem-se em geodésicas [do tipo-tempo para partículas com massa e do tipo luz para partículas sem massa]

Observação: Em coordenadas, $D_u u = 0 \leftrightarrow \dfrac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \sum_{\sigma\lambda} \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} \dfrac{dx^\sigma}{d\tau}\dfrac{dx^\lambda}{d\tau} = 0,\ u^\mu = \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$, onde

$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \dfrac{1}{2}\sum_\rho g^{\sigma\rho}\left(\dfrac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \dfrac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^\mu} - \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\rho}\right)$ e note que $\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \Gamma^\sigma_{\nu\mu}$.

Derivada Covariante



$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$$

$$D_{\partial_\nu}\partial_\mu \equiv \sum_\sigma \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\partial_\sigma$$

Observação: A derivada covariante de um campo vetorial X na direção Y:

$$D_Y X = \sum_{\sigma,\nu} Y^\nu \left[\frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu} + \sum_\mu \Gamma^\sigma_{\mu\nu} X^\mu\right] \frac{\partial}{\partial x^\sigma},$$

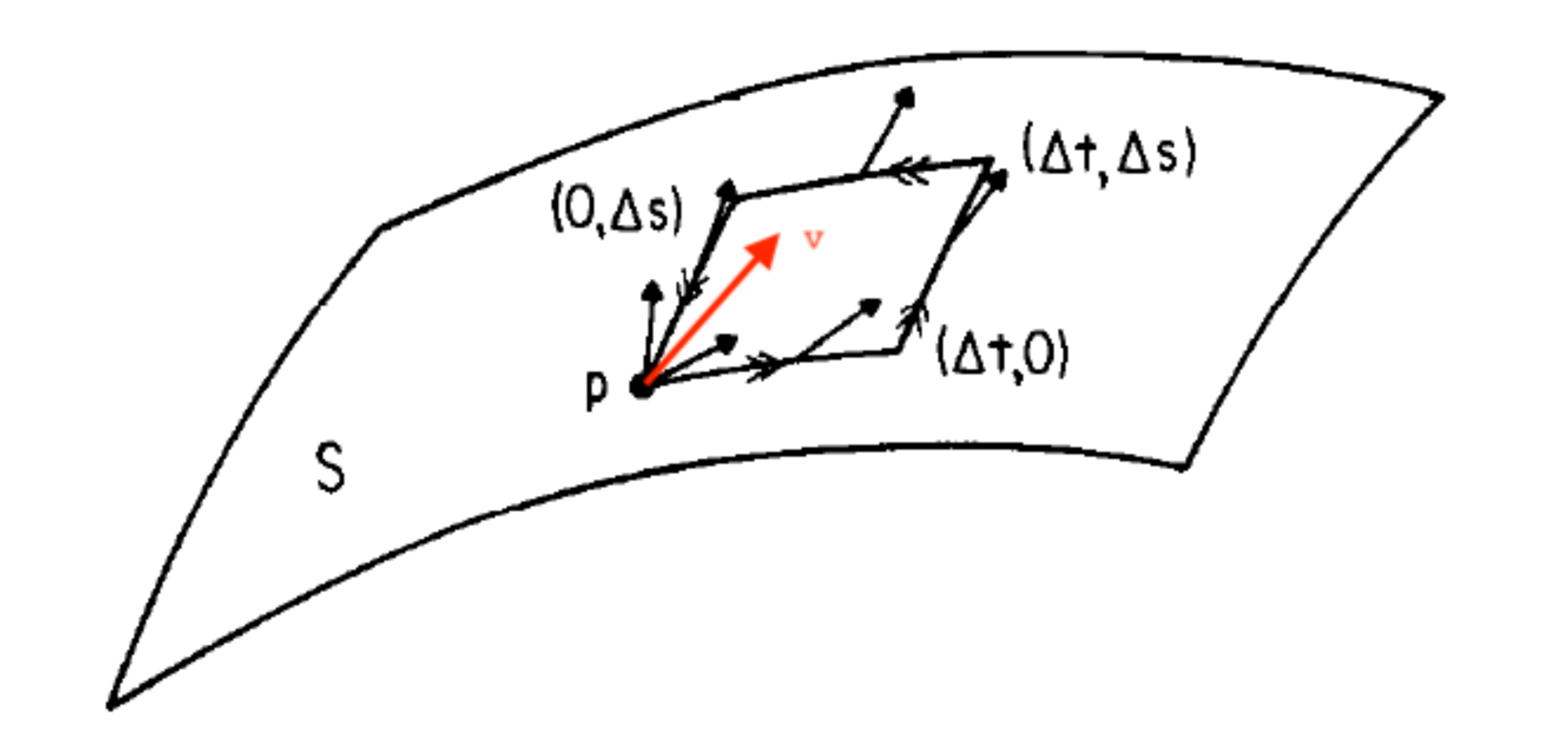
vamos denotar o termo entre chaves por $\nabla_\nu X^\sigma$ e elas definem as componentes do tensor (1,1)

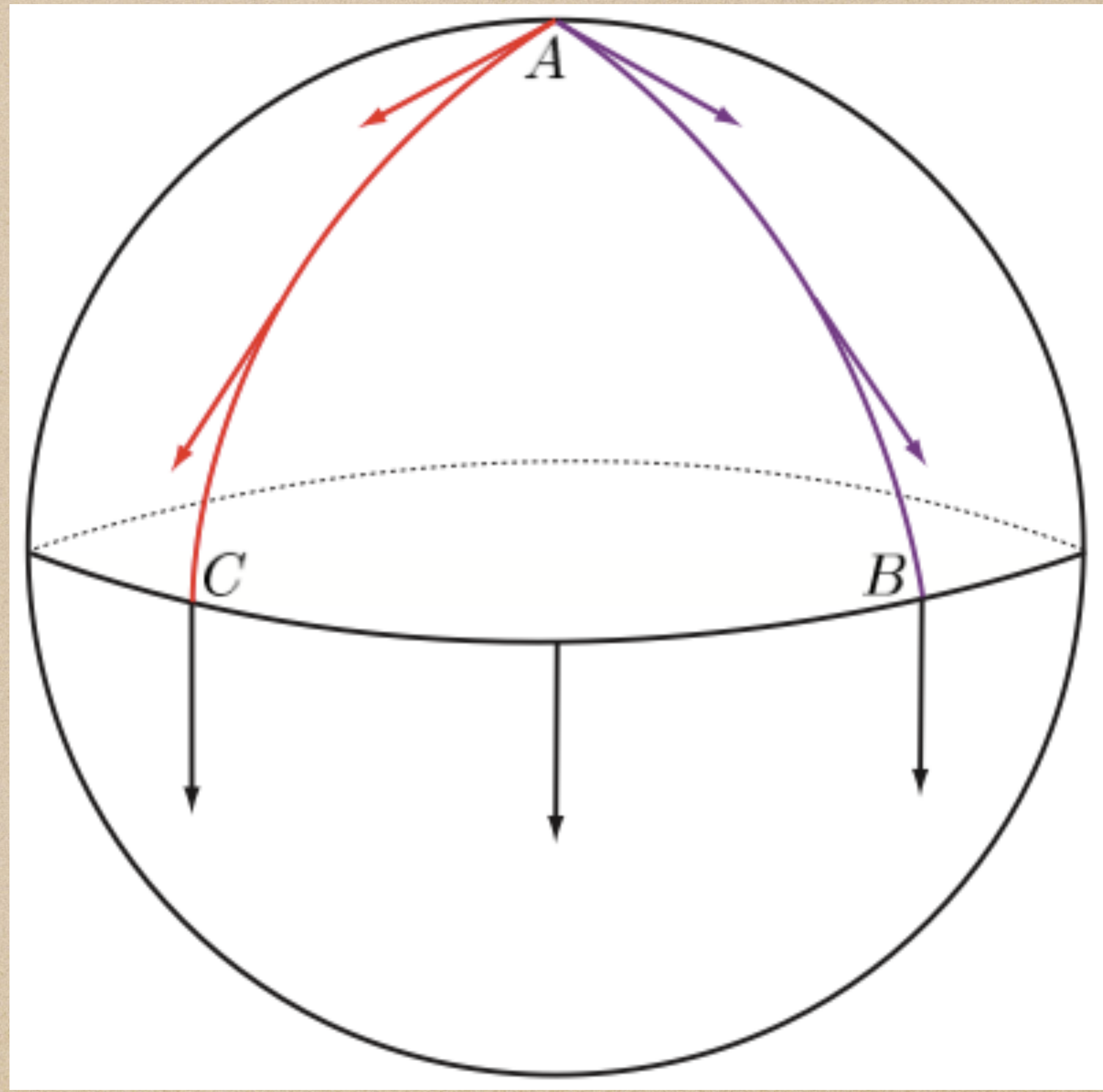
$$\nabla_\nu X^\sigma = \frac{\partial X^\sigma}{\partial x^\nu} + \sum_\mu \Gamma^\sigma_{\mu\nu} X^\mu$$

chamada de derivada covariante de X. Para covetores (1-formas) ω

$$\nabla_\nu \omega_\sigma = \frac{\partial \omega_\sigma}{\partial x^\nu} - \sum_\mu \Gamma^\mu_{\sigma\nu} \omega_\mu$$

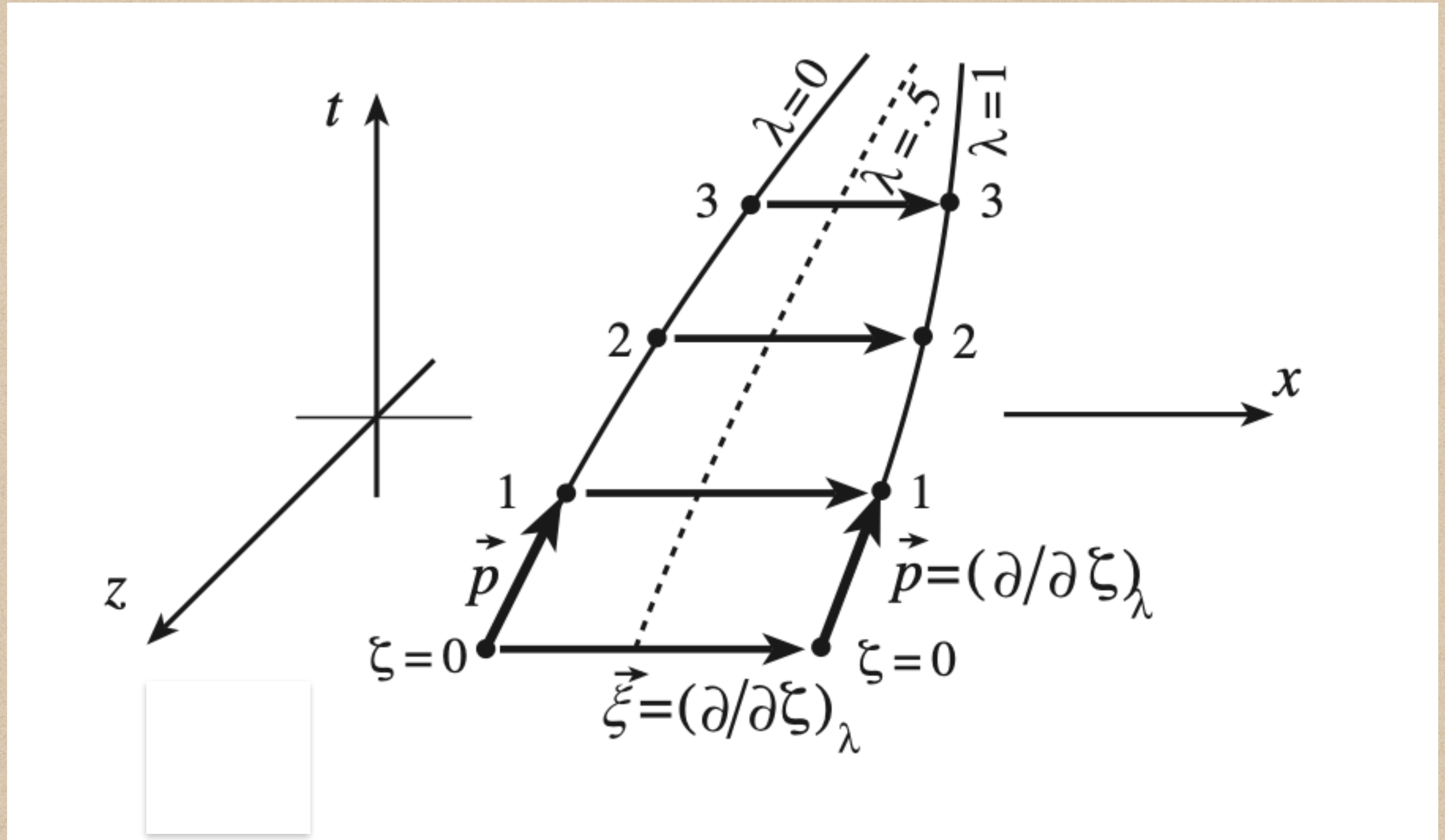
CURVATURA: $\left(D_s D_u - D_u D_s\right) X^a = - R_{bcd}{}^a u^b s^c X^d$



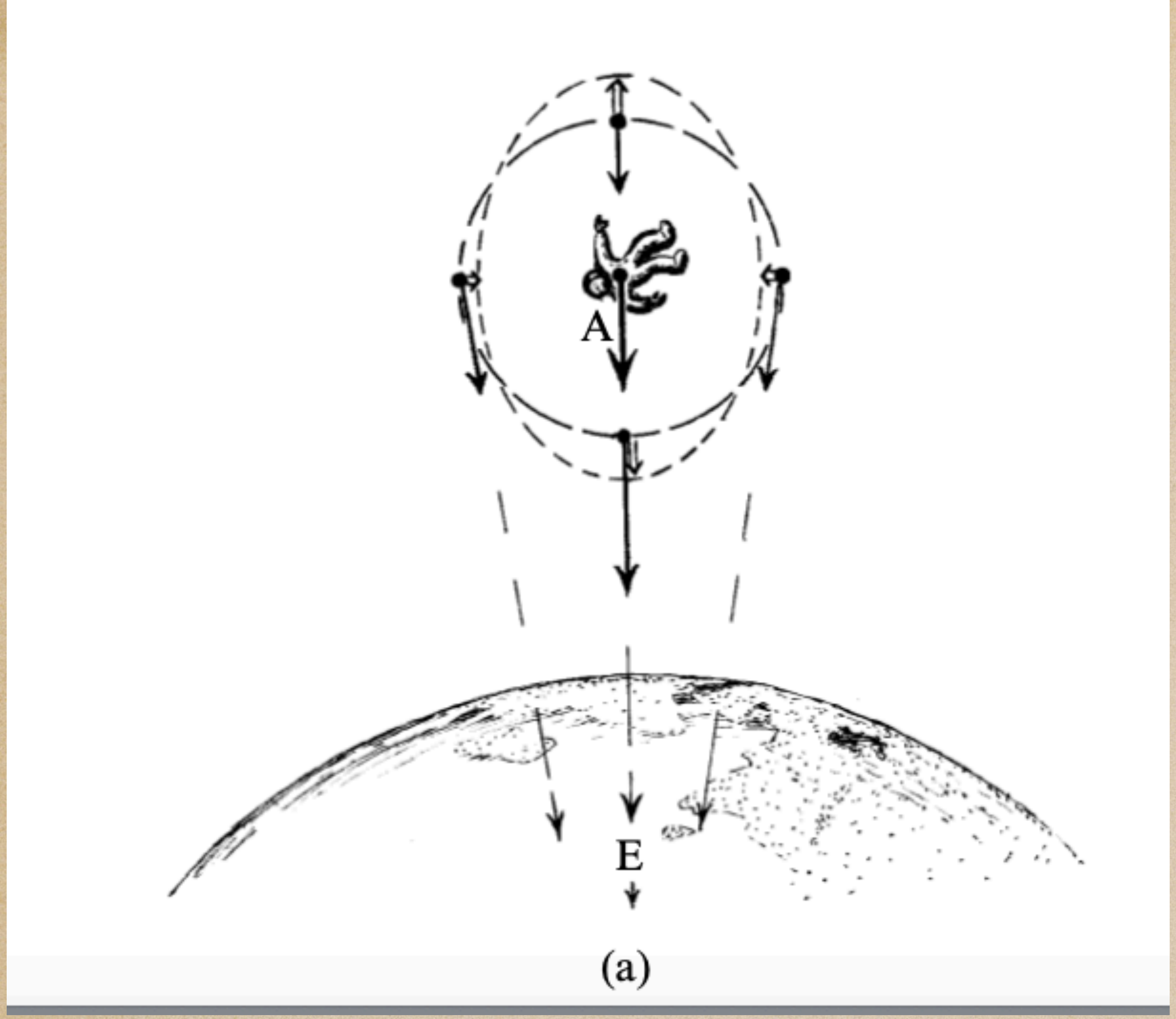


$$\delta X^a = R_{bcd}{}^a u^b s^c X^d \Delta t \Delta s$$

CURVATURA: $\left(D_s D_u - D_u D_s\right) X^a = -R_{bcd}{}^a u^b s^c X^d$

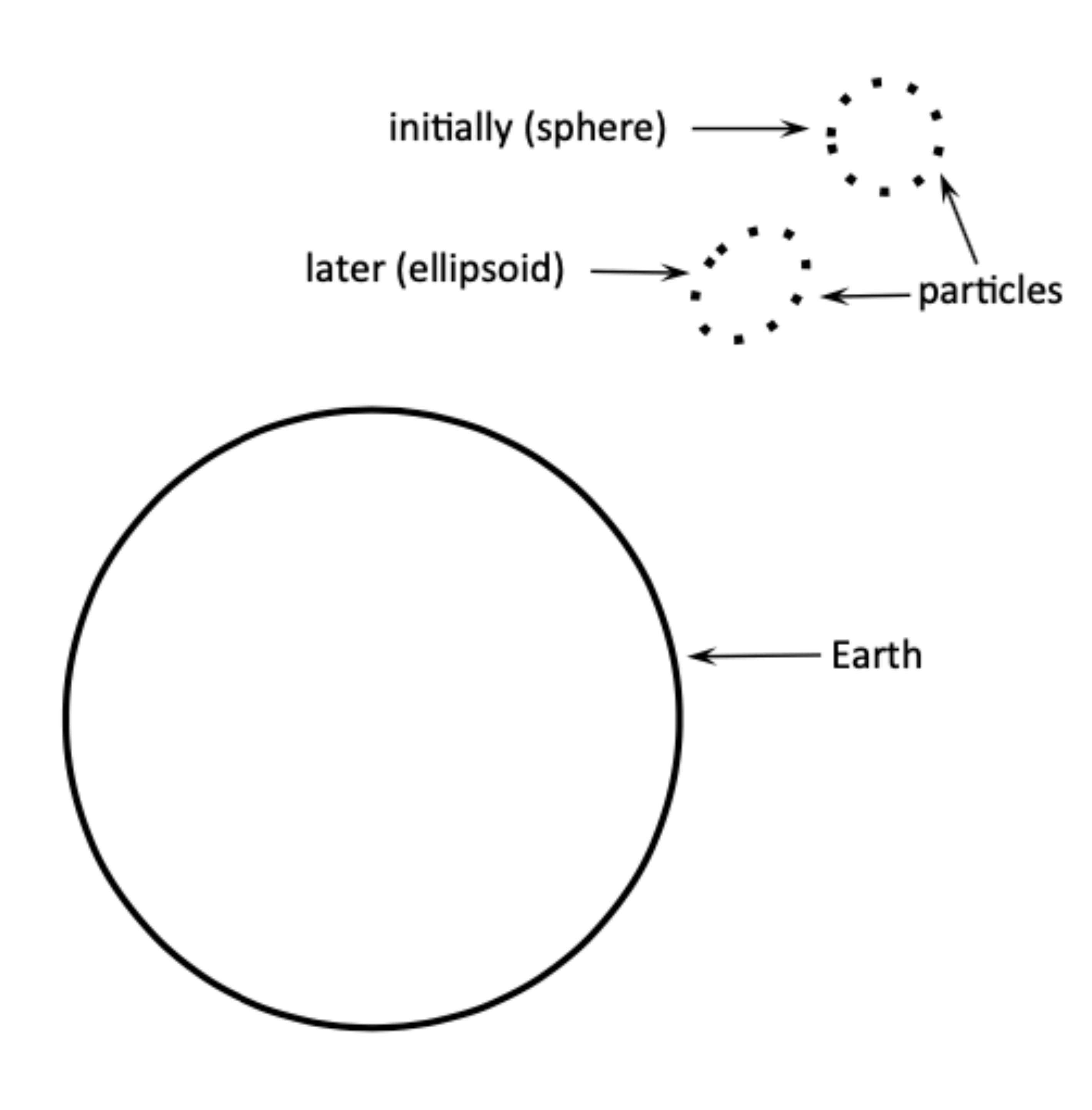


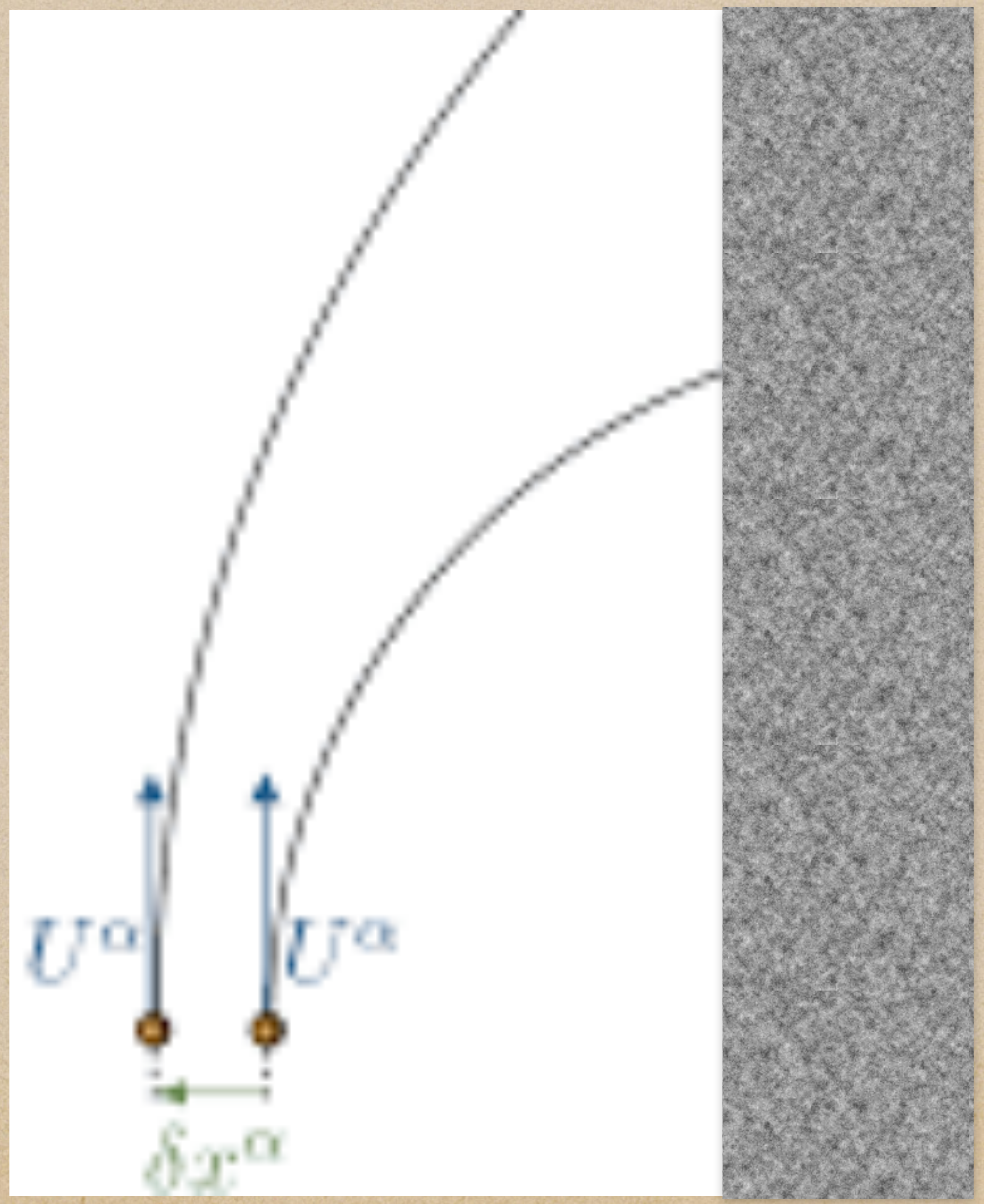
$$D_u D_u \xi^a = -R_{bcd}{}^a u^b \xi^c u^d$$



(a)

$$D_u D_u \xi^a = -R_{bcd}{}^a u^b \xi^c u^d$$





As Equações de Einstein

Chegamos assim às Equações de Einstein

$$G[g] \equiv \mathfrak{Ric}[g] - \frac{1}{2}R[g]g = 8\pi T[g,\Psi] \quad \left(G_{ab}[g] = R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi T_{ab}\right)$$

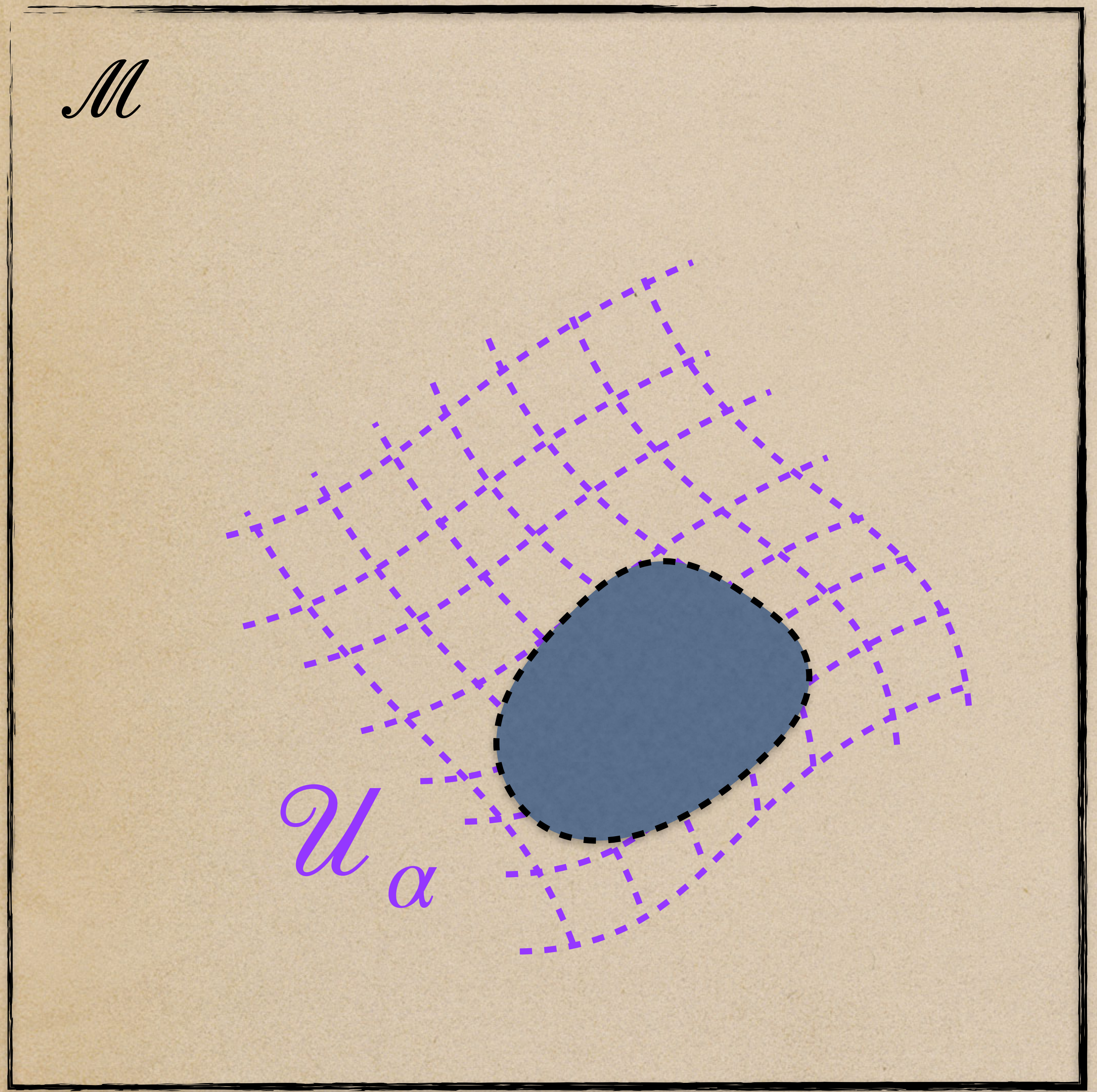
Que relacionam o conteúdo de energia-momento do espaço-tempo com a sua geometria de uma maneira dinâmica.

Nas palavras de J. Wheeler:

> ``Spacetime tells matter how to move;
> matter tells spacetime how to curve."

$G[g] \equiv \mathfrak{Ric}[g] - \frac{1}{2}R[g]g$ é o tensor de Einstein, obtido a partir do tensor de curvatura $\mathfrak{R}$ (que, por conta da derivada covariante ser sem torção e compatível com a métrica g, depende apenas de g) e $T[g,\Psi]$ é o tensor de energia-momento que descreve a distribuição de matéria Ψ.

Áreas e Volumes



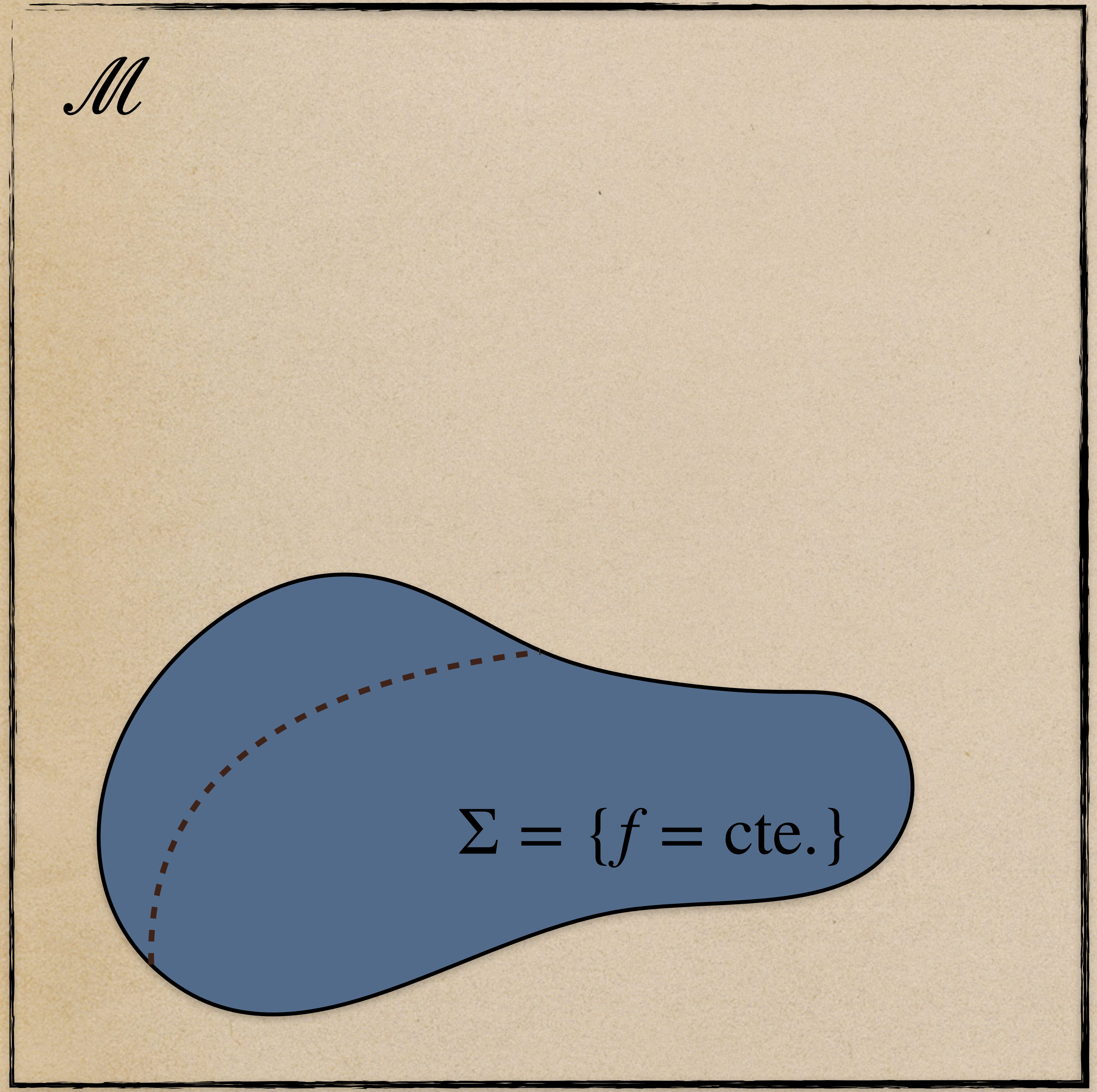
$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\}$ $\{dx^1, \cdots, dx^n\}$

<u>Volumes Espaço-Temporais</u>: Em uma variedade Lorentziana $(\mathscr{M}, g)$, tome uma região $\mathscr{V}$ que está contida em uma carta local $(\mathscr{U}_\alpha, \psi_\alpha)$. O volume espaço-temporal da região $\mathscr{V}$ é dado por

$\mathrm{Vol}\left(\mathscr{V}\right) = \int_{\mathscr{V}} \sqrt{-g}\, dx^1 \cdots dx^n$, onde $g \equiv \det g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu} \equiv g\left(\partial_\mu, \partial_\nu\right)$ [ou ainda $ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$].

<u>Observação:</u> Tal definição não depende da coordenada escolhida (de fato, é possível torna-la explicitamente invariante de coordenadas usando o conceito de n-formas e integrais de n-formas)

Áreas e Volumes



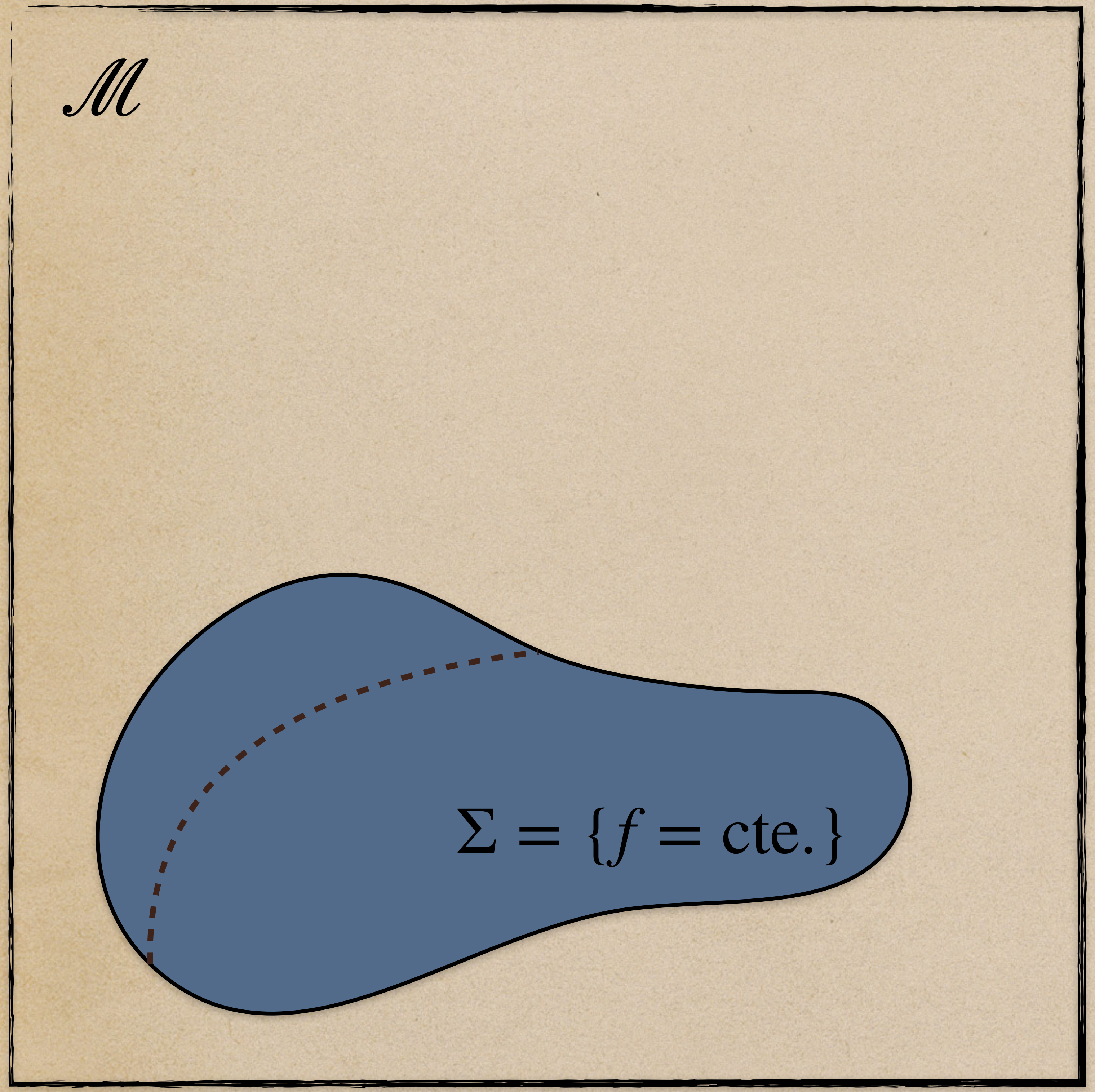
Volumes de Superfícies (n-1)-dimensionais: Em uma variedade Lorentziana $(\mathscr{M}, g)$, tome uma região subvariedade n-1 dimensional Σ (superfície definida por uma função $f = \text{cte.}$, com $f \in \mathscr{F}(\mathscr{M})$). Vamos tomar uma carta local tal que $x^1 = f$ e $g_{1\nu\neq 1} \equiv g\left(\partial_1, \partial_{\nu\neq 1}\right) = 0$ (ou seja, a superfície é definida via $x^1 = \text{cte.}$ e os x^j, $j = 2,\cdots,n$ definem coordenadas em Σ. No entanto, estamos assumindo que ∂_1 não é tipo-luz). Nessas coordenadas (e é sempre possível escolher um tal sistema de coordenadas), a métrica fica na forma

$$g = g_{11}dx^1 \otimes dx^1 + \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij}dx^i \otimes dx^j \text{ (ou } ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + \sum_{i,j} g_{ij}dx^i dx^j\text{)}$$

A métrica $g|_\Sigma$ induzida sobre Σ é obtida fazendo $x^1 = \text{cte.}$ e, assim

$$g|_\Sigma = \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij}dx^i \otimes dx^j \text{ (ou } ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}dx^i dx^j\text{)}$$

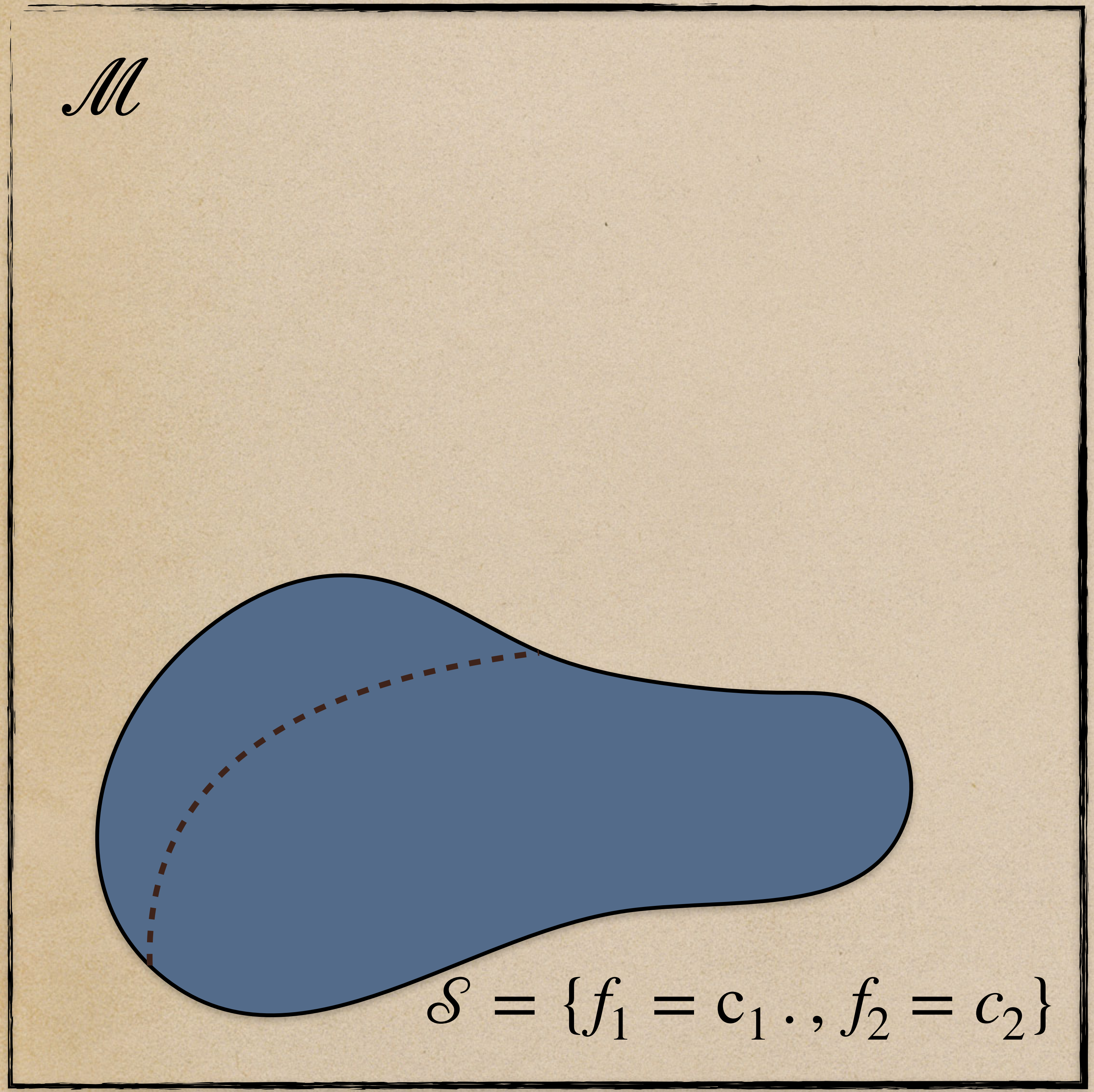
Áreas e Volumes



<u>Volumes de Superfícies (n-1)-dimensionais</u>: Tendo a métrica $g|_\Sigma$ induzida sobre Σ, $g|_\Sigma = \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ (ou $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$), o volume da hiperfície Σ é

$$\mathrm{Vol}(\Sigma) = \int_\Sigma \sqrt{|h|}\, dx^2 \cdots dx^n,$$ onde $h \equiv \det g_{ij}$,

Áreas e Volumes



<u>Volumes de Superfícies (n-2)-dimensionais</u>: Em uma variedade Lorentziana $(\mathscr{M}, g)$, tome uma região subvariedade n-2 dimensional $\mathscr{S}$ (superfície definida por duas funções $f_j = c_j$, com $f_j \in \mathscr{F}(\mathscr{M})$, $j = 1,2$). Vamos tomar uma carta local tal que $x^1 = f_1$, $x^2 = f_2$ e $g_{\alpha\nu} \equiv g\left(\partial_\alpha, \partial_{\nu \neq 1,2}\right) = 0$, $\alpha = 1,2$, e $g_{12} \equiv g\left(\partial_1, \partial_2\right) = 0$ [embora essa última, de fato, não seja necessária]. Ou seja, a superfície é definida via $x^1 = c_1, x^2 = c_2$ e os x^α, $j = 3,\cdots,n$ definem coordenadas em $\mathscr{S}$. Nessas coordenadas (e é sempre possível escolher um tal sistema de coordenadas), a métrica fica na forma

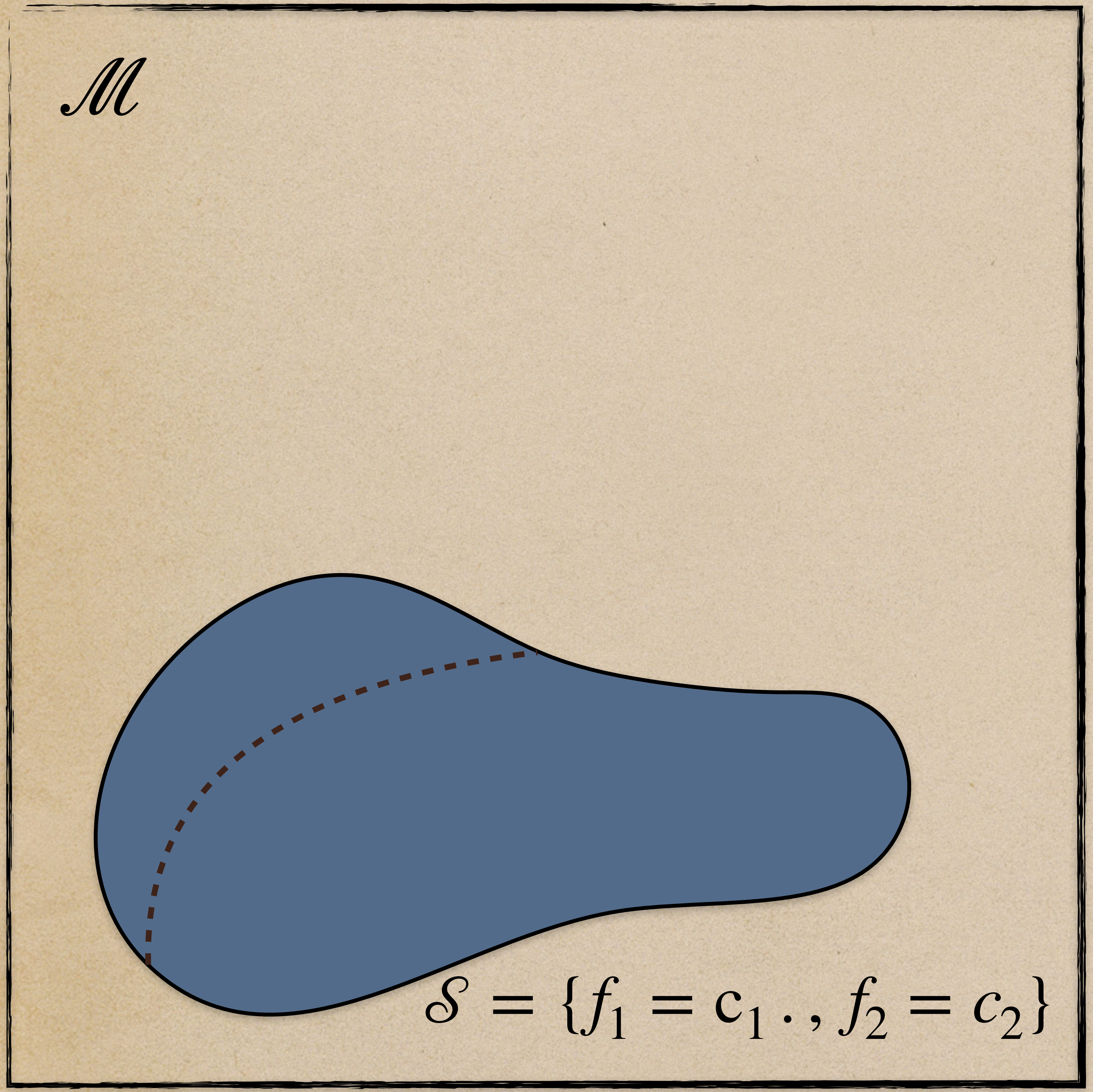
$$g = g_{11} dx^1 \otimes dx^1 + g_{22} dx^2 \otimes dx^2 + \sum_{\alpha,\beta=3}^{n} g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta \text{ (ou}$$

$$ds^2 = g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + \sum_{\alpha,\beta=3}^{n} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)$$

A métrica $g|_{\mathscr{S}}$ induzida sobre Σ é obtida fazendo $x^1 = \text{cte}$. e, assim

$$g|_{\mathscr{S}} = \sum_{\alpha,\beta=3}^{n} g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta \text{ (ou } ds^2 = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta)$$

Áreas e Volumes

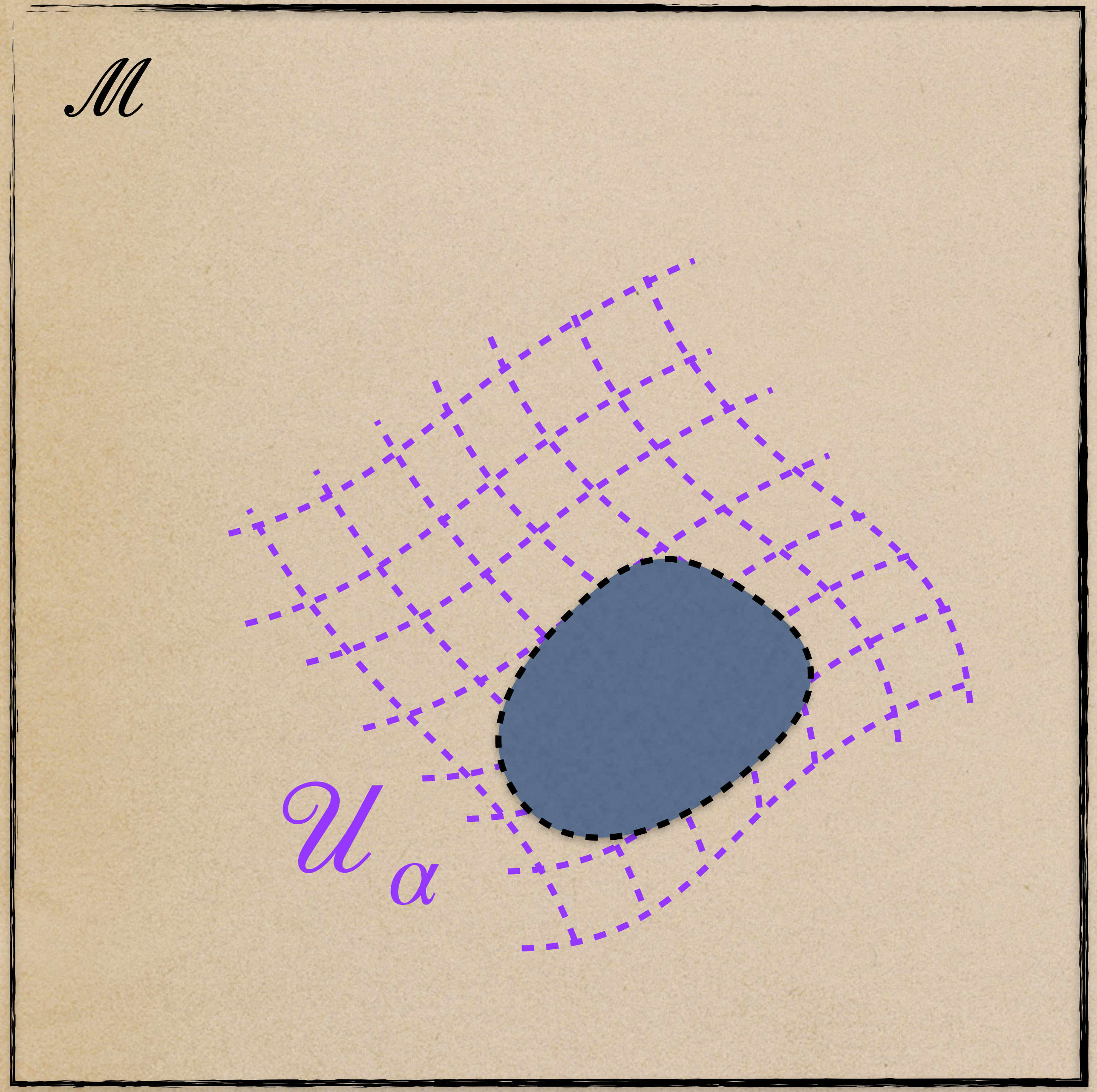


<u>Volumes de Superfícies (n-2)-dimensionais</u>: Tendo a métrica $g|_{\mathscr{S}}$ induzida sobre $\mathscr{S}$, $g|_{\mathscr{S}} = \sum_{\alpha,\beta=3}^{n} g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} \otimes dx^{\beta}$ (ou $ds^2 = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}$), o volume da superfície $\mathscr{S}$ é

$$\mathrm{Vol}\left(\mathscr{S}\right) = \int_{\mathscr{S}} \sqrt{|\sigma|}\, dx^3 \cdots dx^n, \text{ onde } \sigma \equiv \det g_{\alpha\beta}.$$

<u>Observação:</u> Quando n=4 (caso de mais interesse para nós), Σ é uma superfície 3-dimensional e Vol (Σ) define um volume. Já $\mathscr{S}$ define uma superfície 2-dimensional e Vol $\left(\mathscr{S}\right)$ define a área de $\mathscr{S}$

Integração



$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ $\{dx^1, \cdots, dx^n\}$

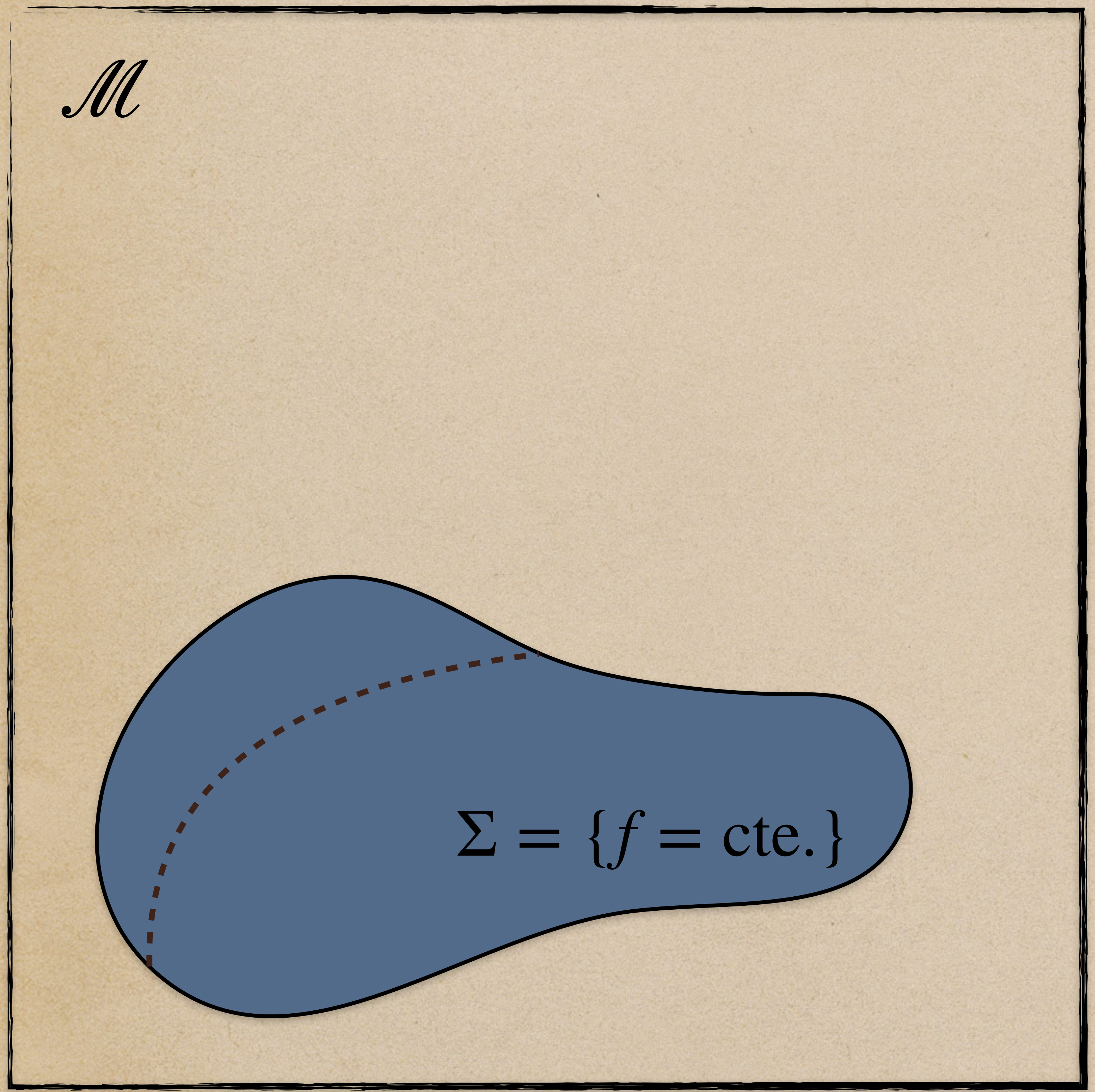
Integração em $\mathscr{M}$: Em uma variedade Lorentziana $(\mathscr{M}, g)$, tome uma região $\mathscr{V}$ que está contida em uma carta local $(\mathscr{U}_\alpha, \psi_\alpha)$ e uma função $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ (cuja representação coordenada é integrável em qualquer carta). A integral de f na região $\mathscr{V}$ é dado por

$$\int_{\mathscr{V}} f \equiv \int_{\mathscr{V}} f(x^1, \cdots, x^n)\sqrt{-g}\,dx^1 \cdots dx^n,$$ onde $g \equiv \det g_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu} \equiv g\left(\partial_\mu, \partial_\nu\right)$

[ou ainda $ds^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$] e $f(x^1, \cdots, x^n) \equiv f \circ \psi_\alpha^{-1}(x^1, \cdots, x^n)$ denota a representação coordenada de f na carta usada.

Observação: Tal definição não depende da coordenada escolhida (de fato, é possível torna-la explicitamente invariante de coordenadas usando o conceito de n-formas e integrais de n-formas)

Integração

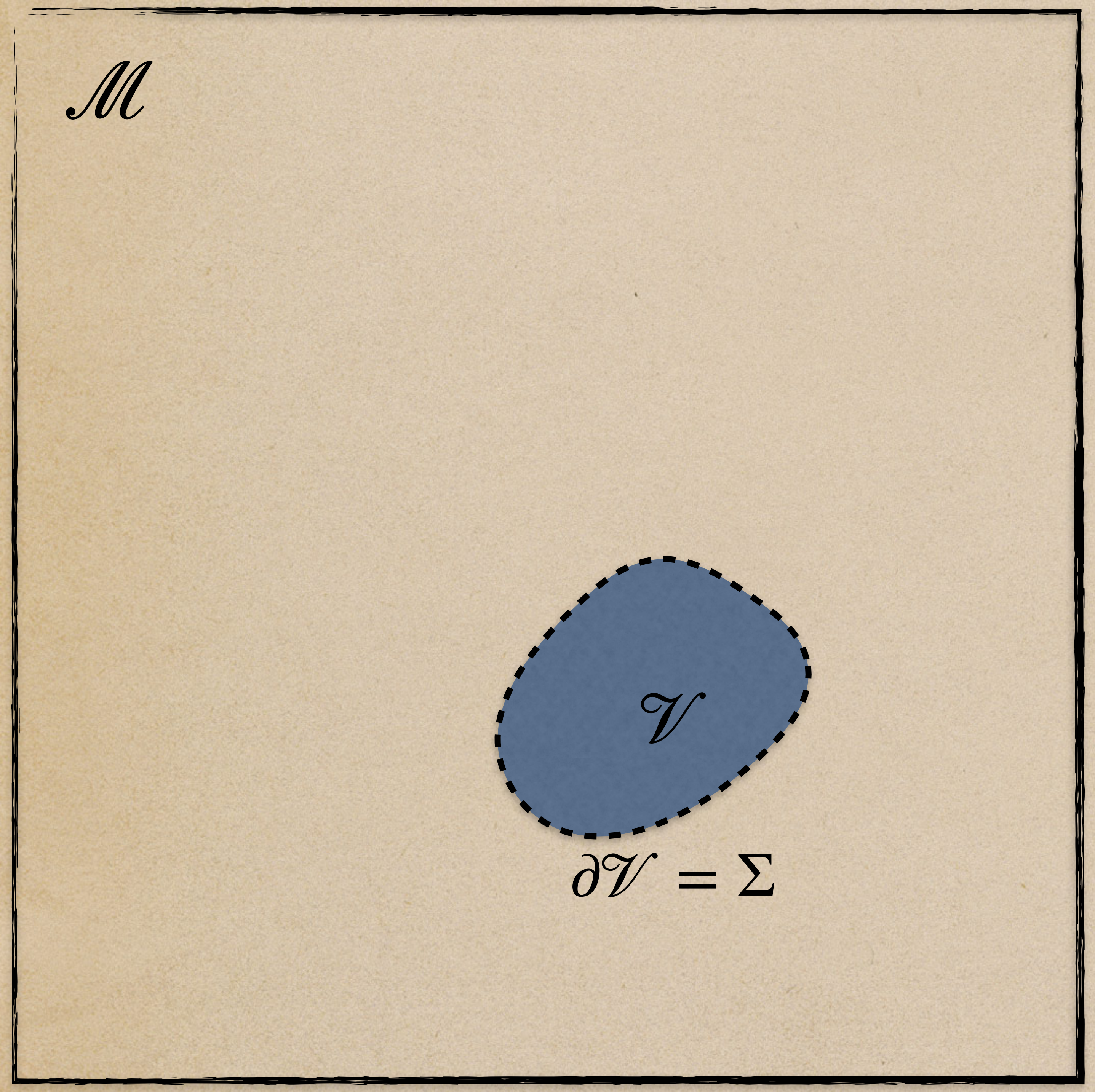


<u>Integração em Superfícies (n-1)-dimensionais</u>: Tendo a métrica $g|_\Sigma$ induzida sobre Σ, $g|_\Sigma = \sum_{i,j=2}^{n} g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ (ou $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$), a integral de uma função $\mathfrak{f} : \Sigma \to \mathbb{R}$ em Σ é

$$\int_\Sigma \mathfrak{f} = \int_\Sigma \mathfrak{f}(x^2, \cdots, n^n)\sqrt{|h|}\, dx^2 \cdots dx^n,$$ onde $h \equiv \det g_{ij}$ e $\mathfrak{f}(x^2, \cdots, x^n)$ é a representação coordenada da função $\mathfrak{f}$ nas coordenadas $\{x^2, \cdots, x^n\}$ de Σ (suposta integrável).

<u>Observação:</u> A definição para integral em superfícies $\mathscr{S}$ de dimensão n-k é completamente análoga.

Integração



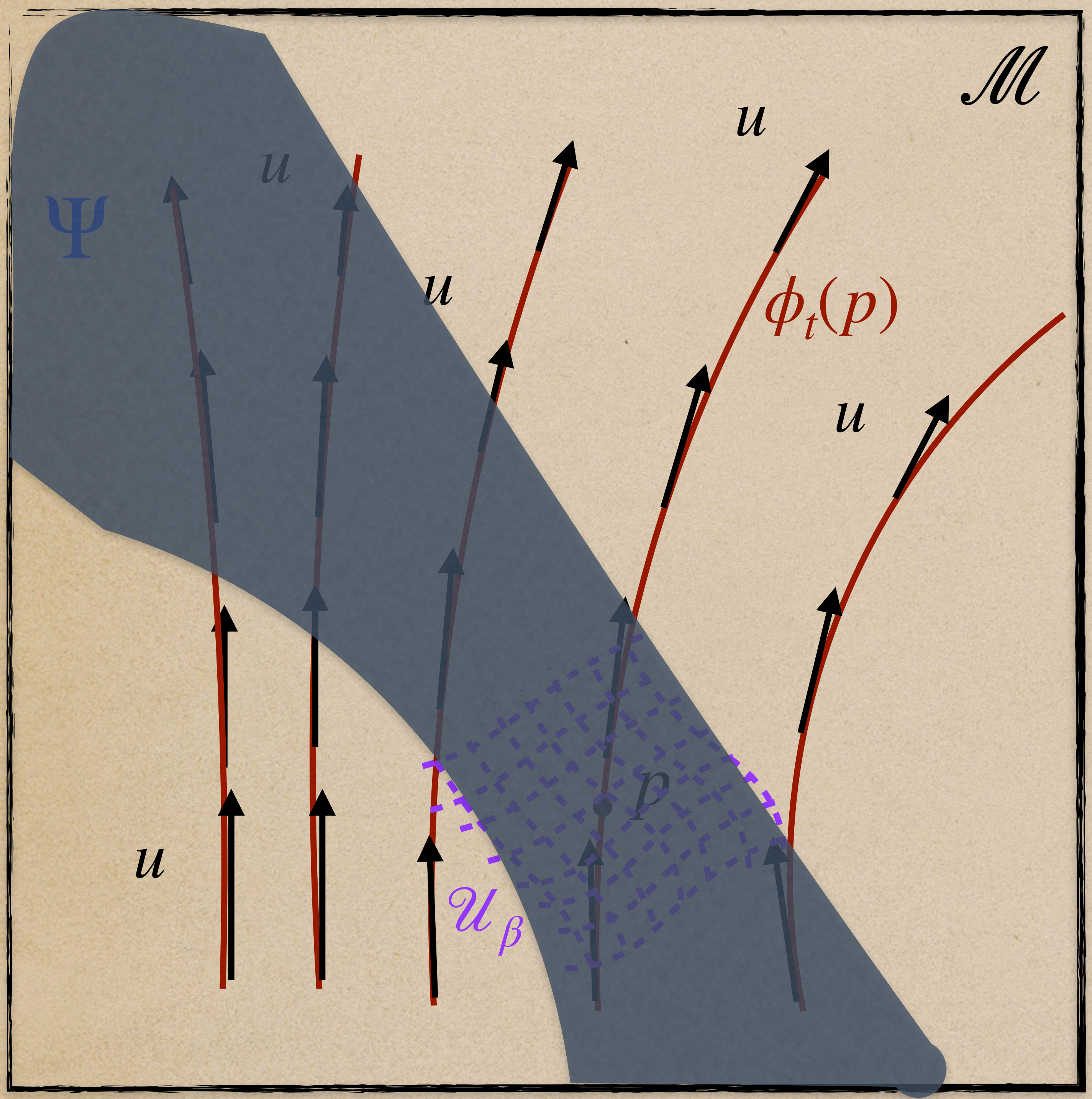
$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\} \quad \{dx^1, \cdots, dx^n\}$$

<u>Teorema de Gauss [versão campo vetorial]</u>: Em uma variedade Lorentziana $(\mathscr{M}, g)$, tome um campo vetorial $X \in T^1_0\mathscr{M}$ e uma região n-dimensional $\mathscr{V}$ cuja fronteira $\partial\mathscr{V} = \Sigma$ é uma superfície (n-1)-dimensional. Então

$$\int_{\mathscr{V}} \nabla_a X^a = \int_{\partial\mathscr{V}} X^a n_a,$$

onde n é o vetor normal à $\partial\mathscr{V} = \Sigma$ que aponta "para dentro" de $\mathscr{V}$ nas regiões de $\partial\mathscr{V} = \Sigma$ em que n é tipo-tempo e “para fora” de $\mathscr{V}$ nas regiões de $\partial\mathscr{V} = \Sigma$ em que n é tipo-espaço.

Simetrias



$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^0}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\} \qquad \{dx^0, \cdots, dx^3\}$$

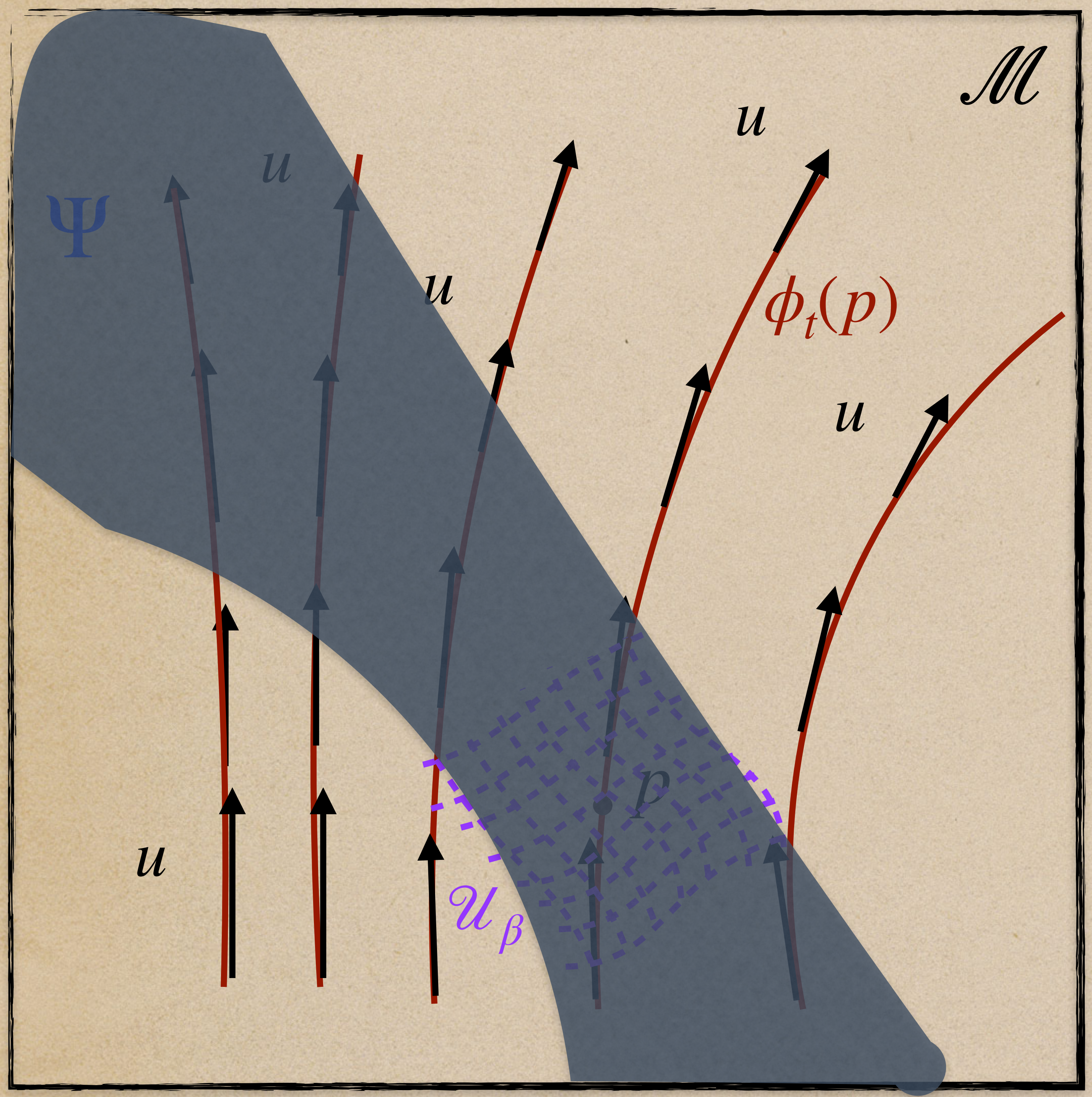
<u>Campos de Killing e Simetrias:</u> Considere um espaço-tempo $(\mathscr{M}, g)$ e uma partícula teste m nesse espaço-tempo. Na ausência de forças externas a partícula move-se ao longo de uma geodésica que será o extremo da ação associada à Lagrangiana

$$L(\gamma, \gamma') \equiv \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Note então que, se existir algum sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ tal que as componentes $g_{\mu\nu}$ da métrica NÃO dependam de uma certa coordenada x^σ (i.e., $\partial_\sigma g_{\mu\nu} = 0$) então $\dfrac{\partial L}{\partial x^\sigma} = 0$ e assim $\dfrac{d}{d\tau}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^\sigma}\right) = 0$, onde $\dot{x}^\mu \equiv \dfrac{dx^\mu}{d\tau}$.

Portanto, temos uma quantidade conservada, $P_\sigma \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}^\sigma}$ ao longo da geodésica, associada à variável x^σ.

Simetrias



$\left\{\frac{\partial}{\partial x^0}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$ $\{dx^0, \cdots, dx^3\}$

Campos de Killing e Simetrias: O campo vetorial $\xi \equiv \frac{\partial}{\partial x^\sigma}$ em $(\mathscr{M}, g)$ é dito um Campo de Killing e ele é o gerador das simetria associada à invariância da métrica por x^σ. Tal transformação de simetria é implementada via o fluxo (curvas integrais) ϕ^ξ_λ de ξ.

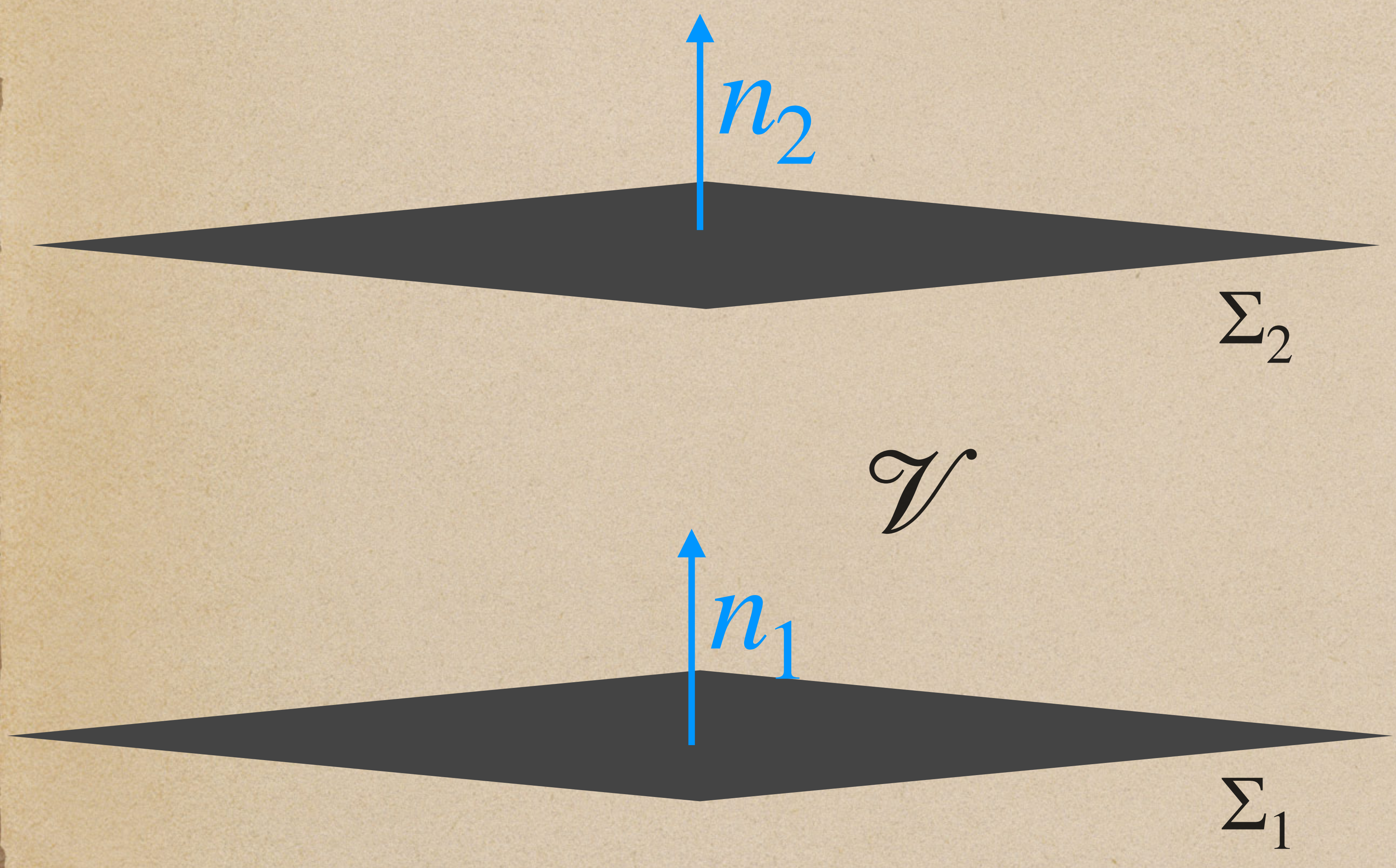
Note que $P_\sigma \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\sigma} = \sum_\mu g_{\sigma\mu}\dot{x}^\mu = g(\partial_\sigma, u)$, onde usamos que $g_{\sigma\mu} = g(\partial_\sigma, \partial_\mu)$ e $u = \sum_\mu \dot{x}^\mu \partial_\mu$. Assim, podemos escrever a quantidade conservada associada à ξ como:

$P_\sigma = g(\xi, u)$

Observação: 1-Existe uma definição mais geral e livre de sistema de coordenadas para simetrias e campos de Killing usando o conceito de isomorfismos e derivadas de Lie.

2-Note que $\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0$

Simetrias



$$\partial\mathscr{V} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

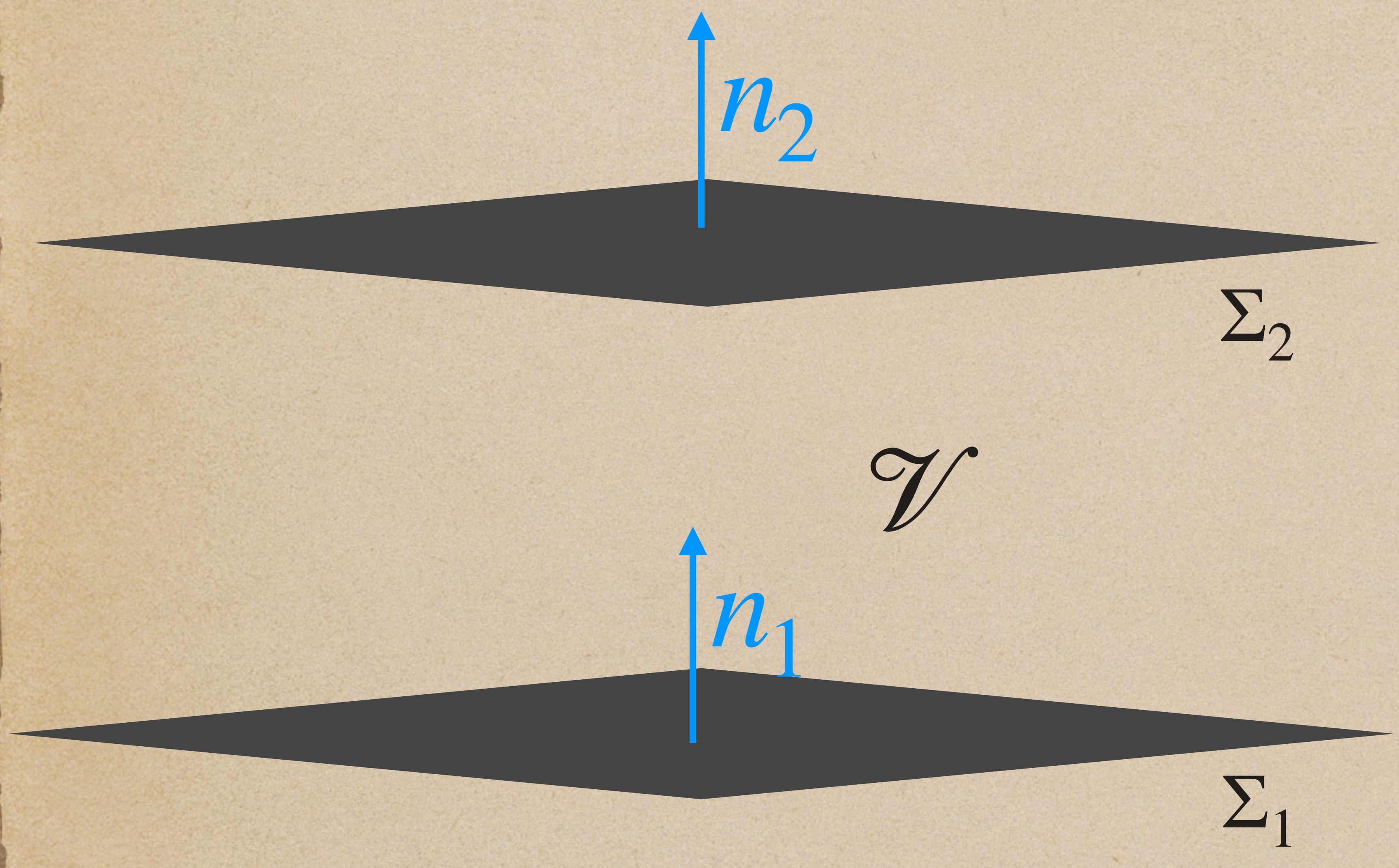
Campos de Killing e Simetrias: Quando temos um campo de Killing tipo-tempo ξ e matéria descrita por um tensor de energia momento $T^{\mu\nu}$ $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, podemos definir uma corrente $J^\mu = -T^{\mu\nu}\xi_\nu$. Como campos de Killing satisfazem a condição $\nabla_{(\mu}\xi_{\nu)} = 0$, temos que

$\nabla_\mu J^\mu = -(\nabla_\mu T^{\mu\nu})\xi_\nu - T^{\mu\nu}\nabla_\mu \xi_\nu = 0.$

Assim $J^\mu = -T^{\mu\nu}\xi_\nu$ define uma corrente conservada que tem associada uma lei de conservação (no caso, conservação da energia). Para ver isso, vamos tomar a região $\mathscr{V}$ mostrada ao lado e integrar $\nabla_\mu J^\mu = 0$ nela. Assim, pelo teorema de Gauss

$$0 = \int_{\mathscr{V}} \nabla_\mu J^\mu = \int_{\partial\mathscr{V}} J^\mu n_\mu \equiv \int_{\Sigma_1} J^\mu (n_1)_\mu + \int_{\Sigma_2} J^\mu(-n_2)_\mu$$

Simetrias



$$\partial\mathscr{V} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

<u>Campos de Killing e Simetrias:</u> Temos então que

$$E_{\Sigma_j} \equiv -\int_{\Sigma_j} J^\mu (n_j)_\mu = \int_{\Sigma_j} T^{\mu\nu}(n_j)_\mu \xi_\nu,$$

interpretado como a energia total da matéria no instante Σ_j como medido por observadores que seguem as curvas integrais de ξ com $\xi^\mu \xi_\mu = -1$ é conservada:

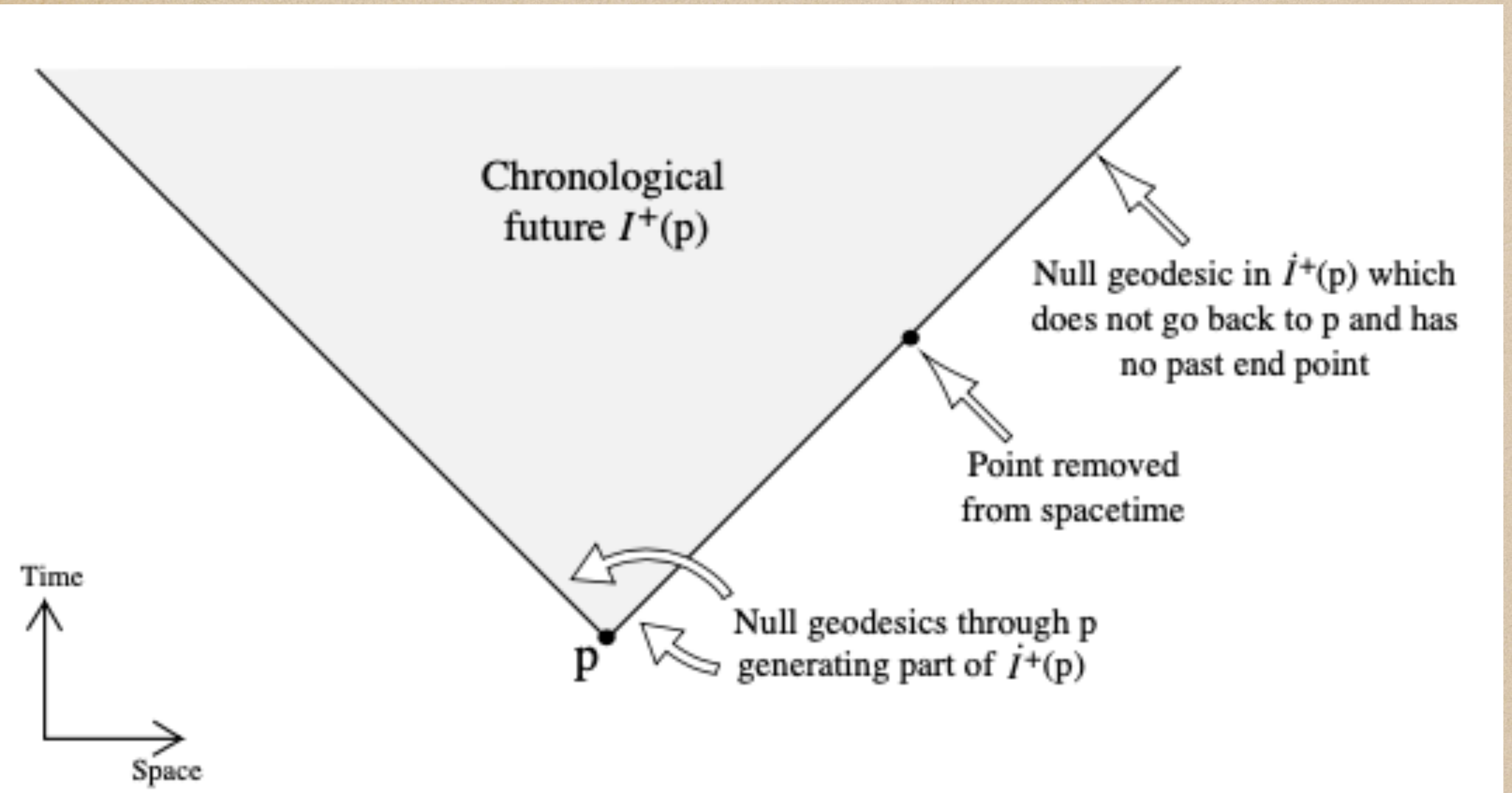
$$0 = \int_{\mathscr{V}} \nabla_\mu J^\mu = \int_{\partial\mathscr{V}} J^\mu n_\mu \equiv \int_{\Sigma_1} J^\mu (n_1)_\mu + \int_{\Sigma_2} J^\mu(-n_2)_\mu = -E_{\Sigma_1} + E_{\Sigma_2}$$

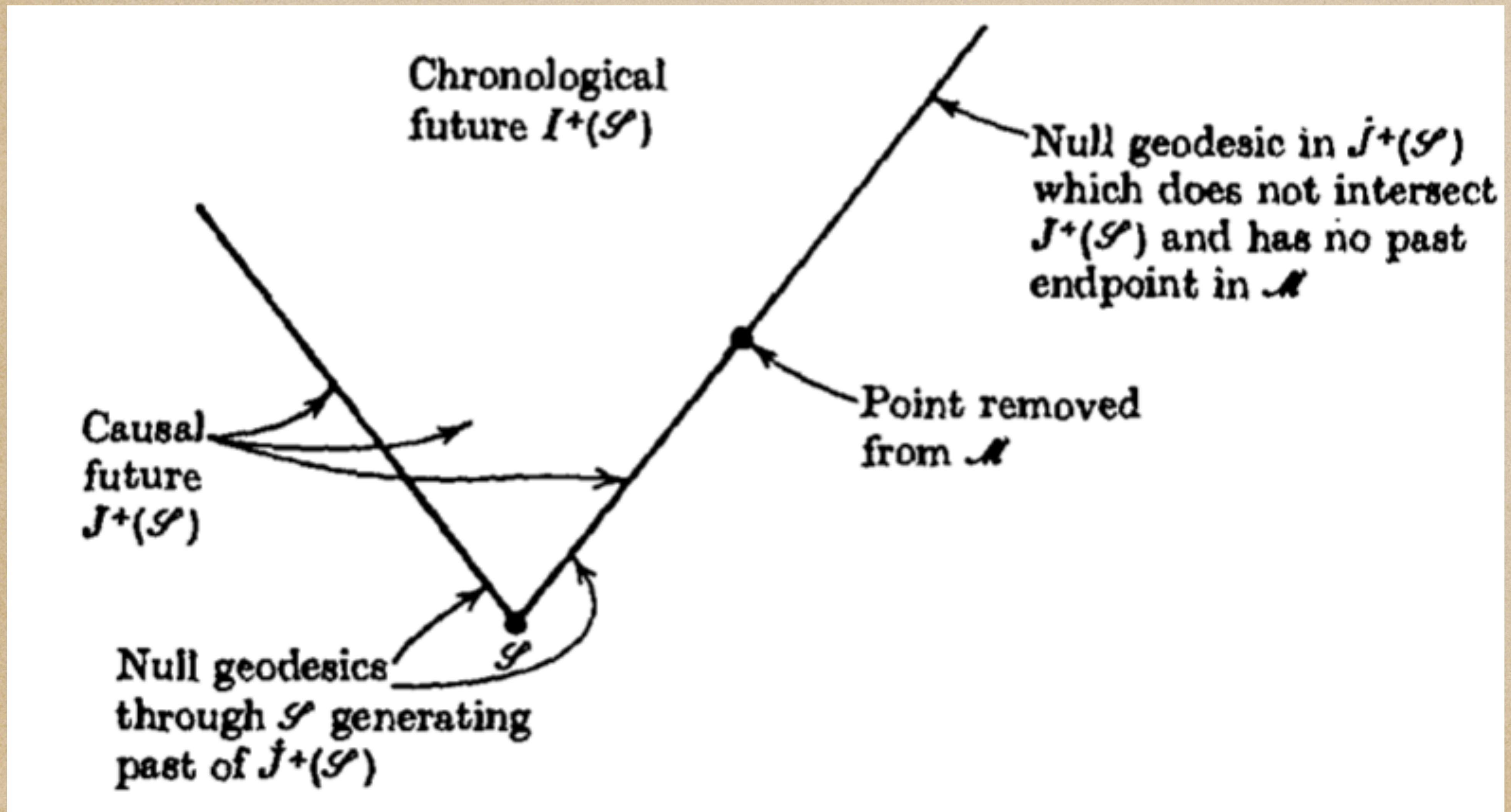
e portanto

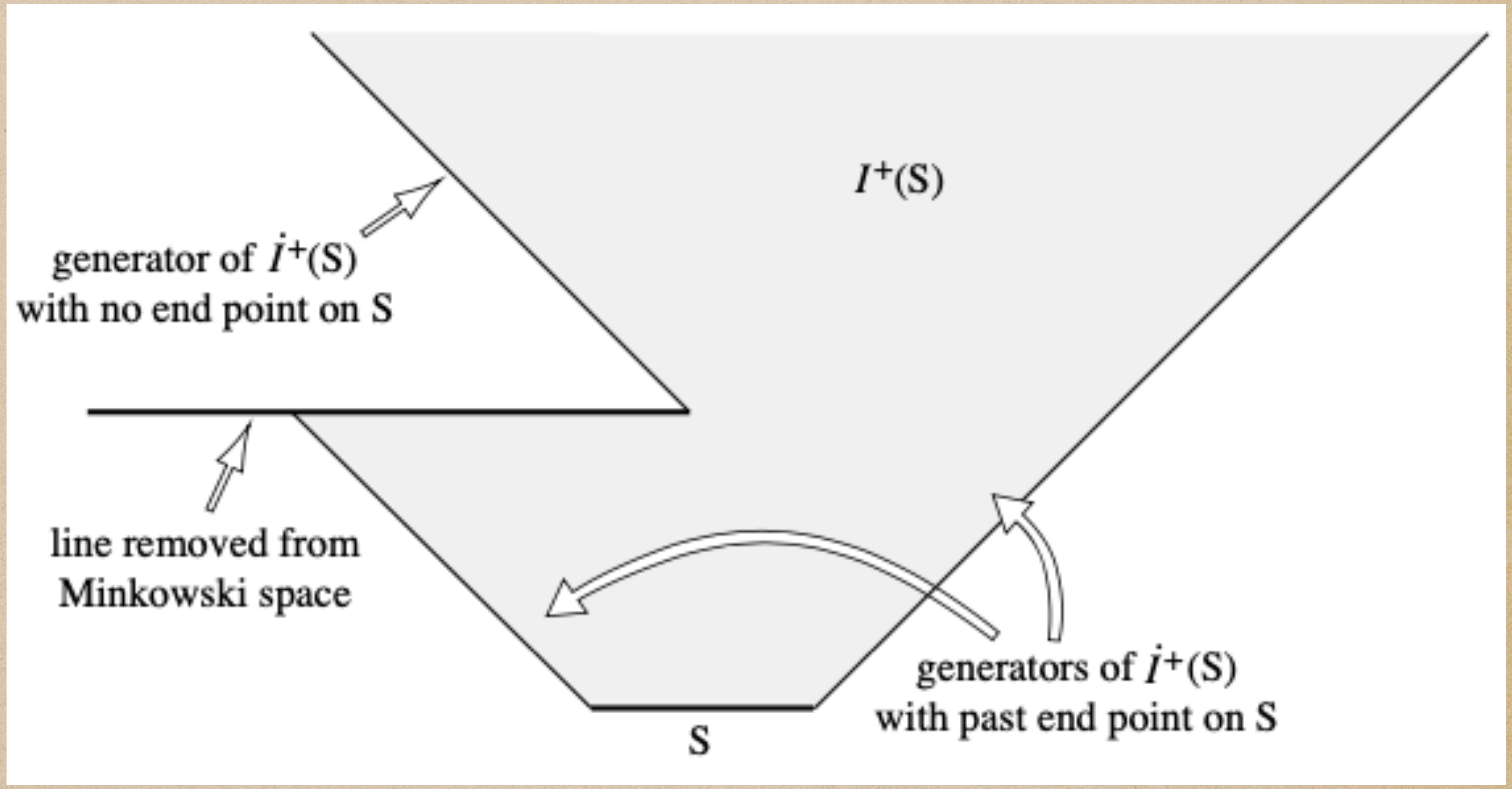
$$E_{\Sigma_1} = E_{\Sigma_2}$$

Estrutura Causal

Causalidade—O Futuro Cronológico e Causal:



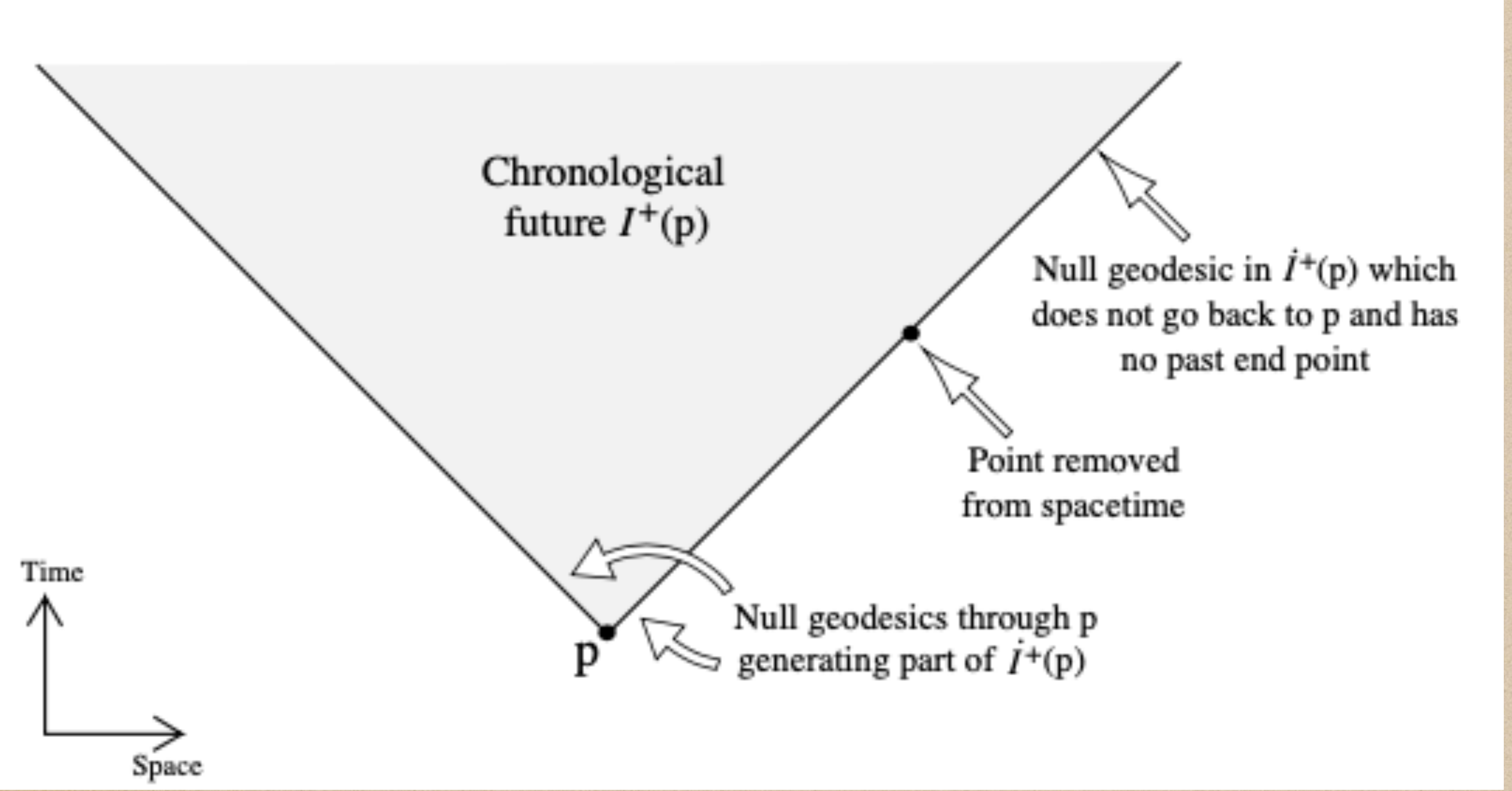


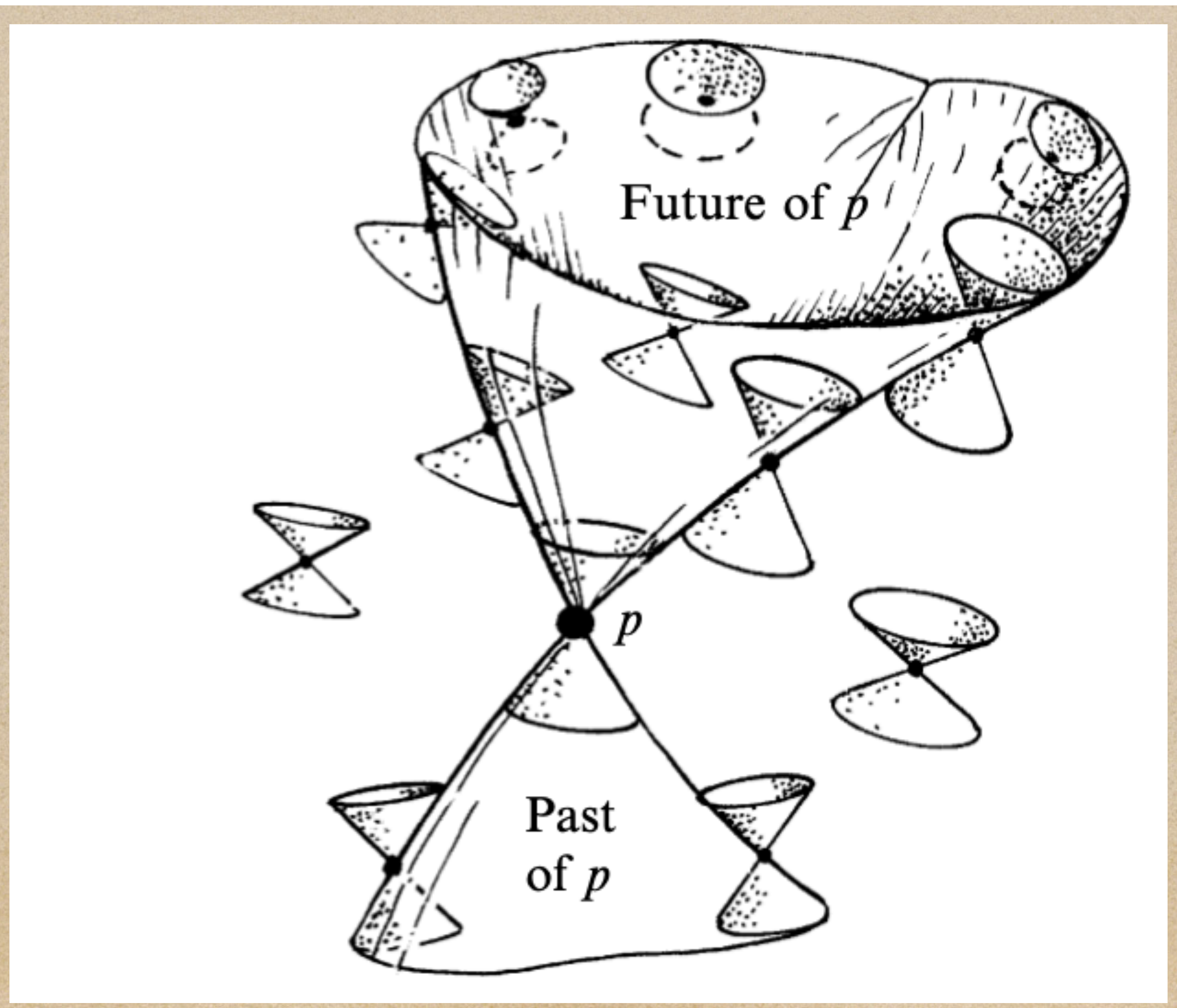


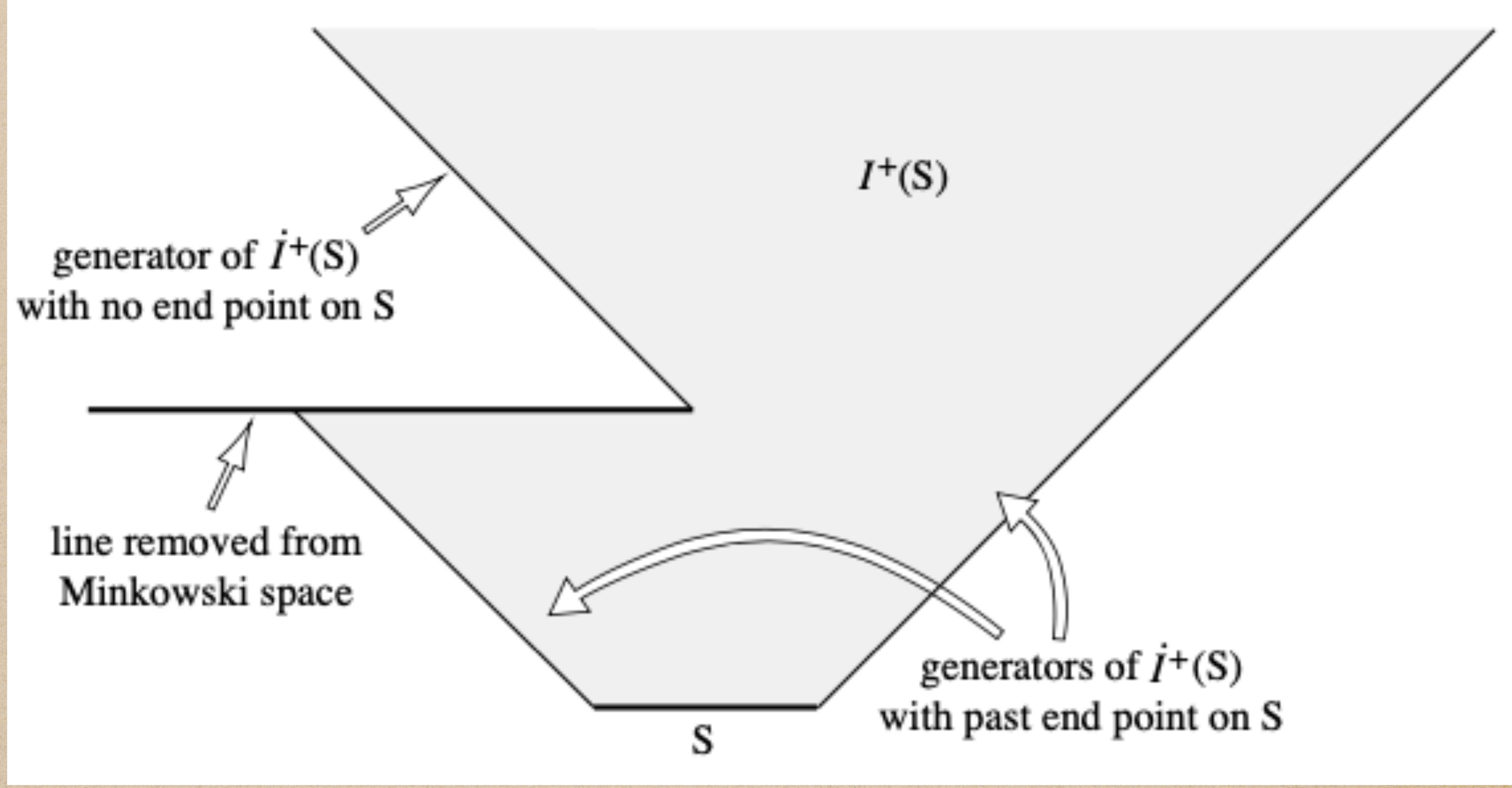
Futuro causal: Conjunto $J^+(S)$ de eventos q de $\mathscr{M}$ tal que existe uma curva causal (tipo-tempo ou tipo-luz) de algum evento de S até q

Estrutura Causal

Causalidade—O Futuro Cronológico e Causal:



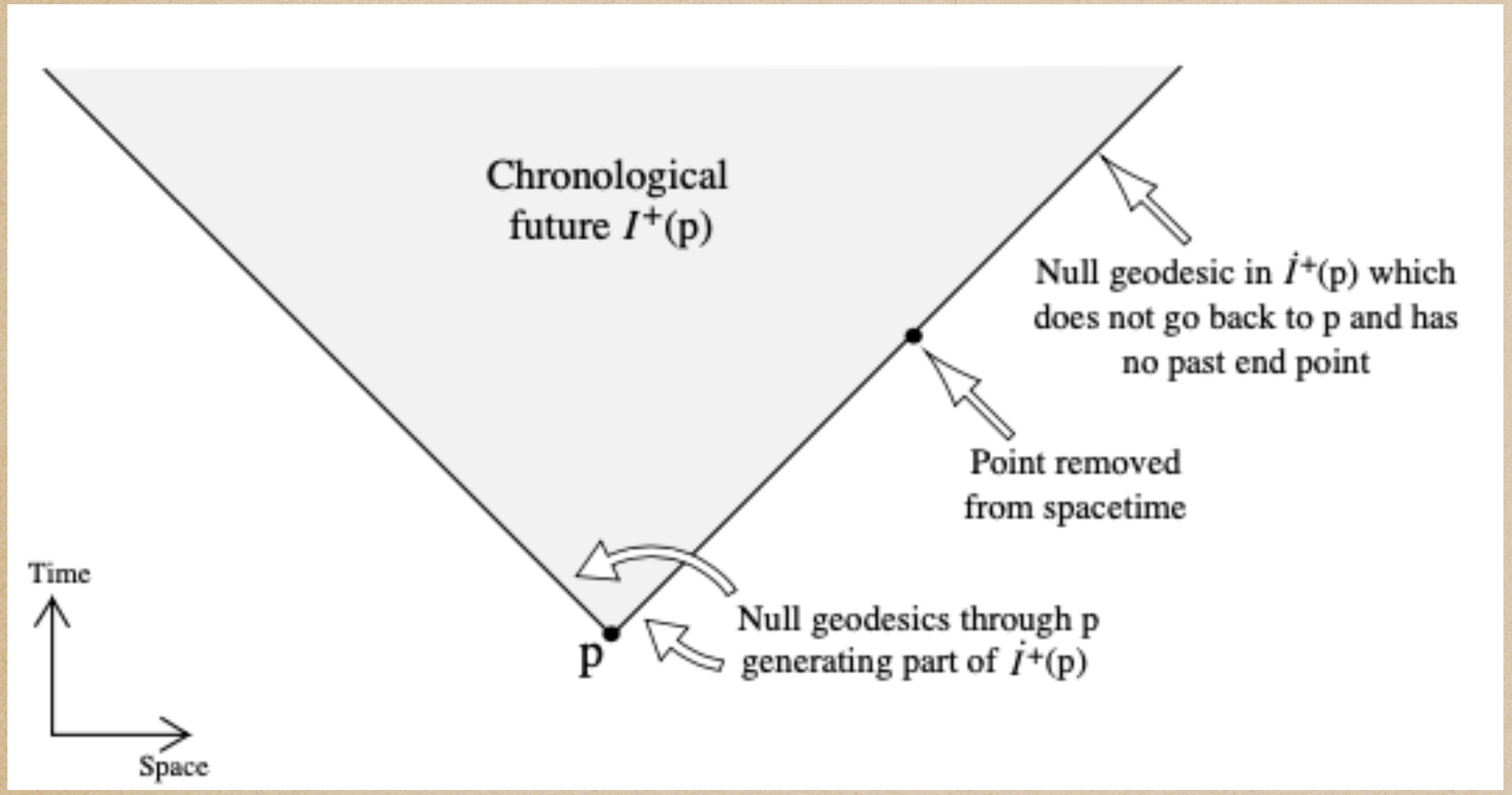


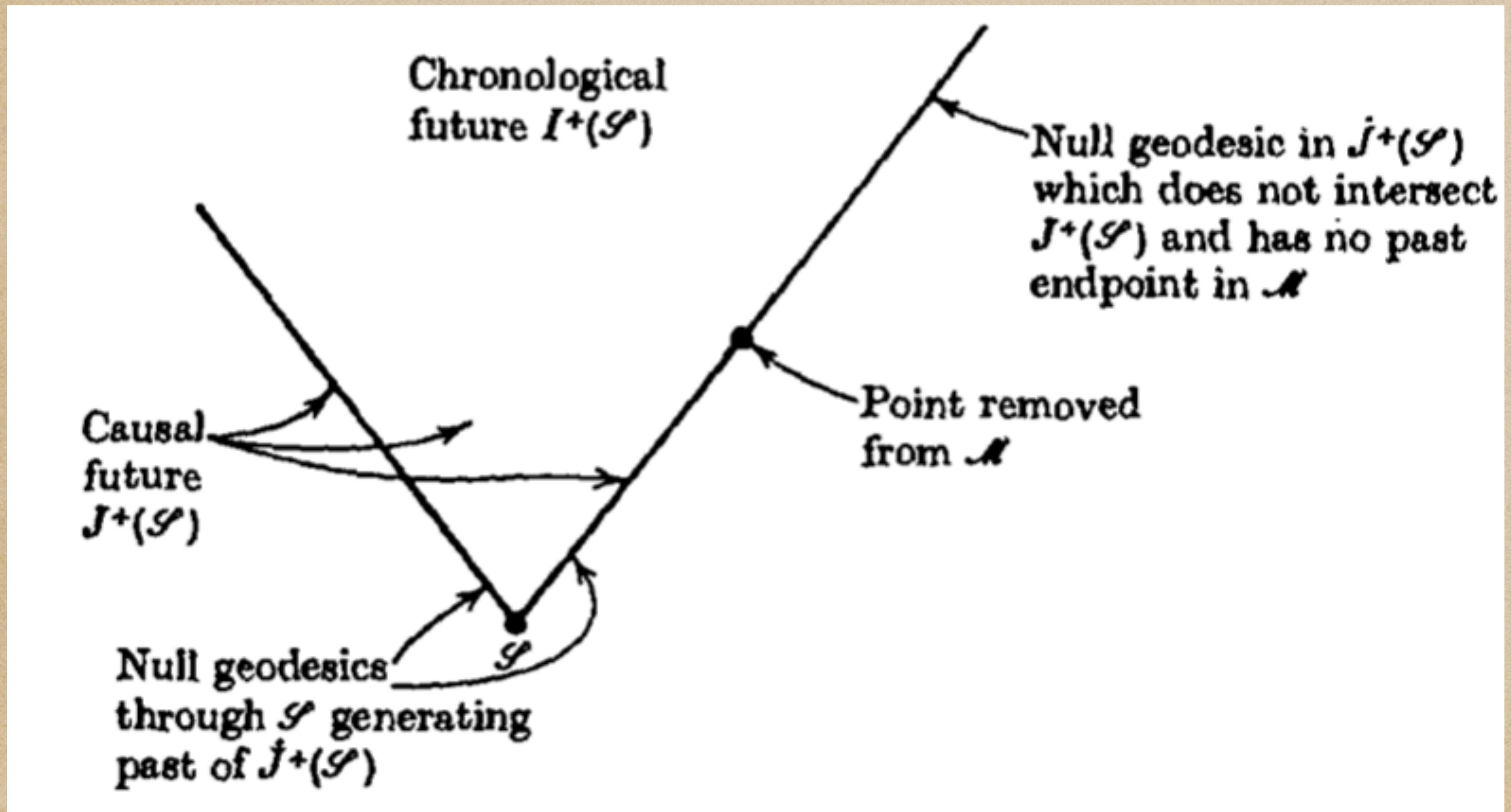


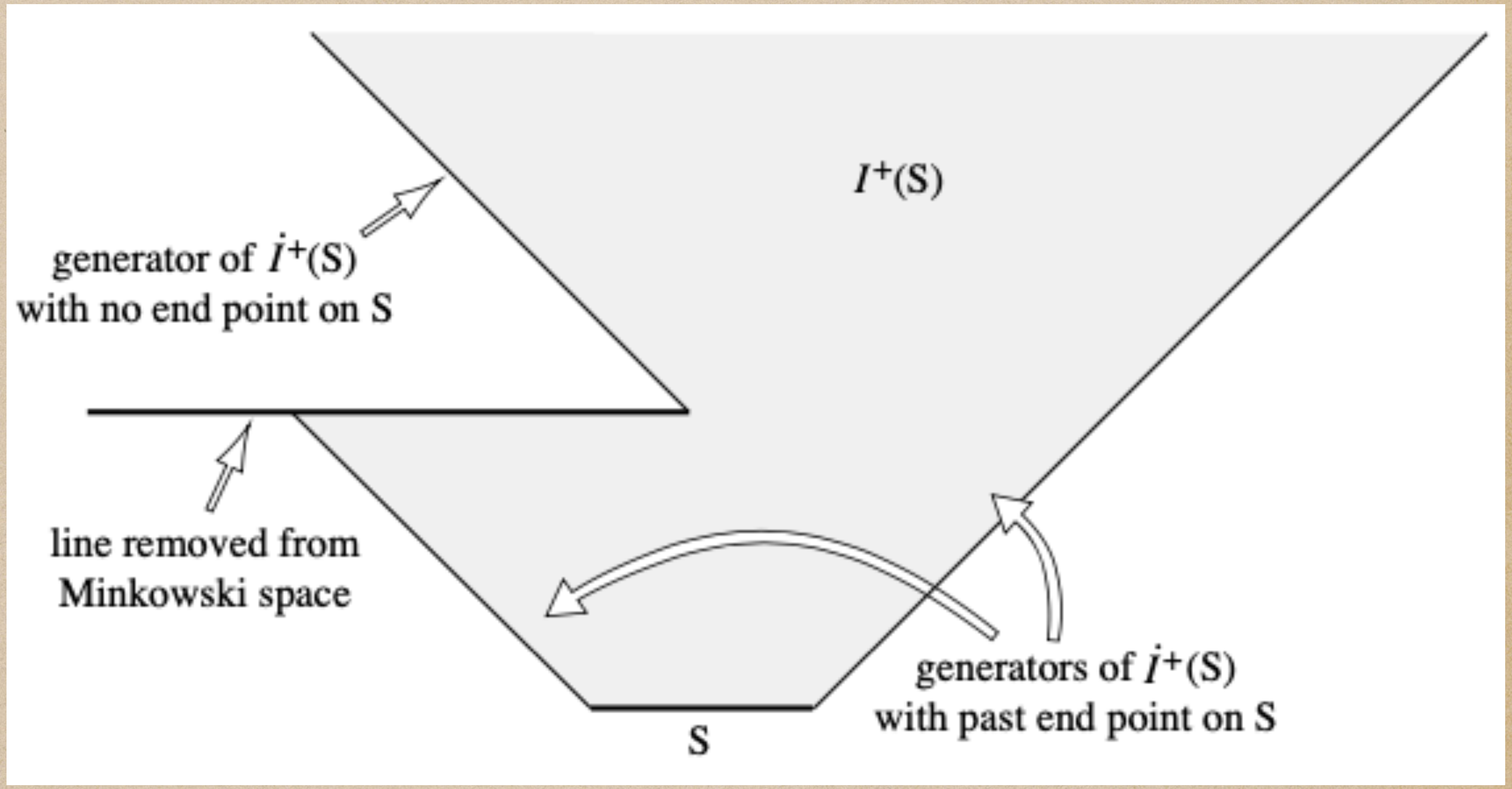
Futuro cronológico: Conjunto $I^+(S)$ de eventos q de $\mathscr{M}$ tal que existe uma curva tipo-tempo de algum evento de S até q

Estrutura Causal

Causalidade—O Futuro Cronológico e Causal:



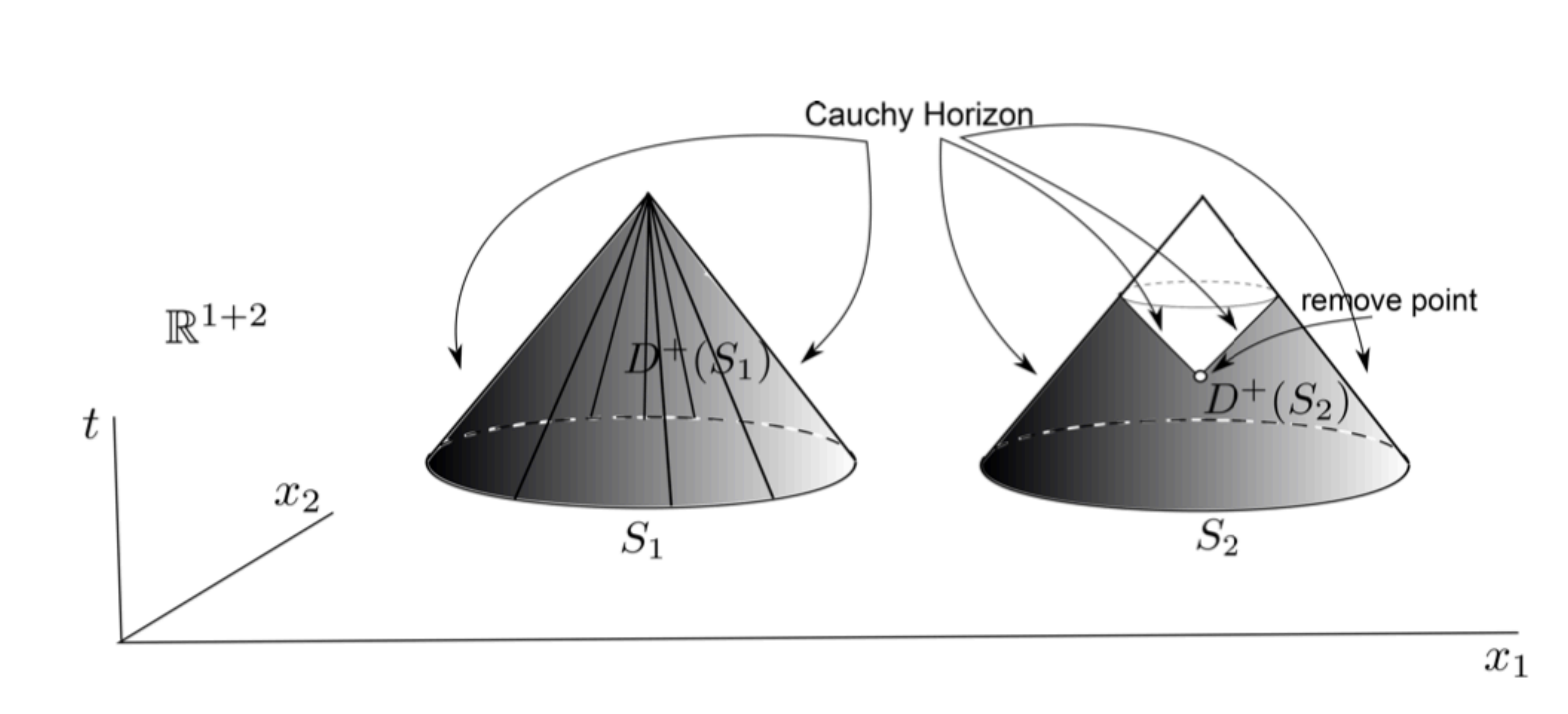


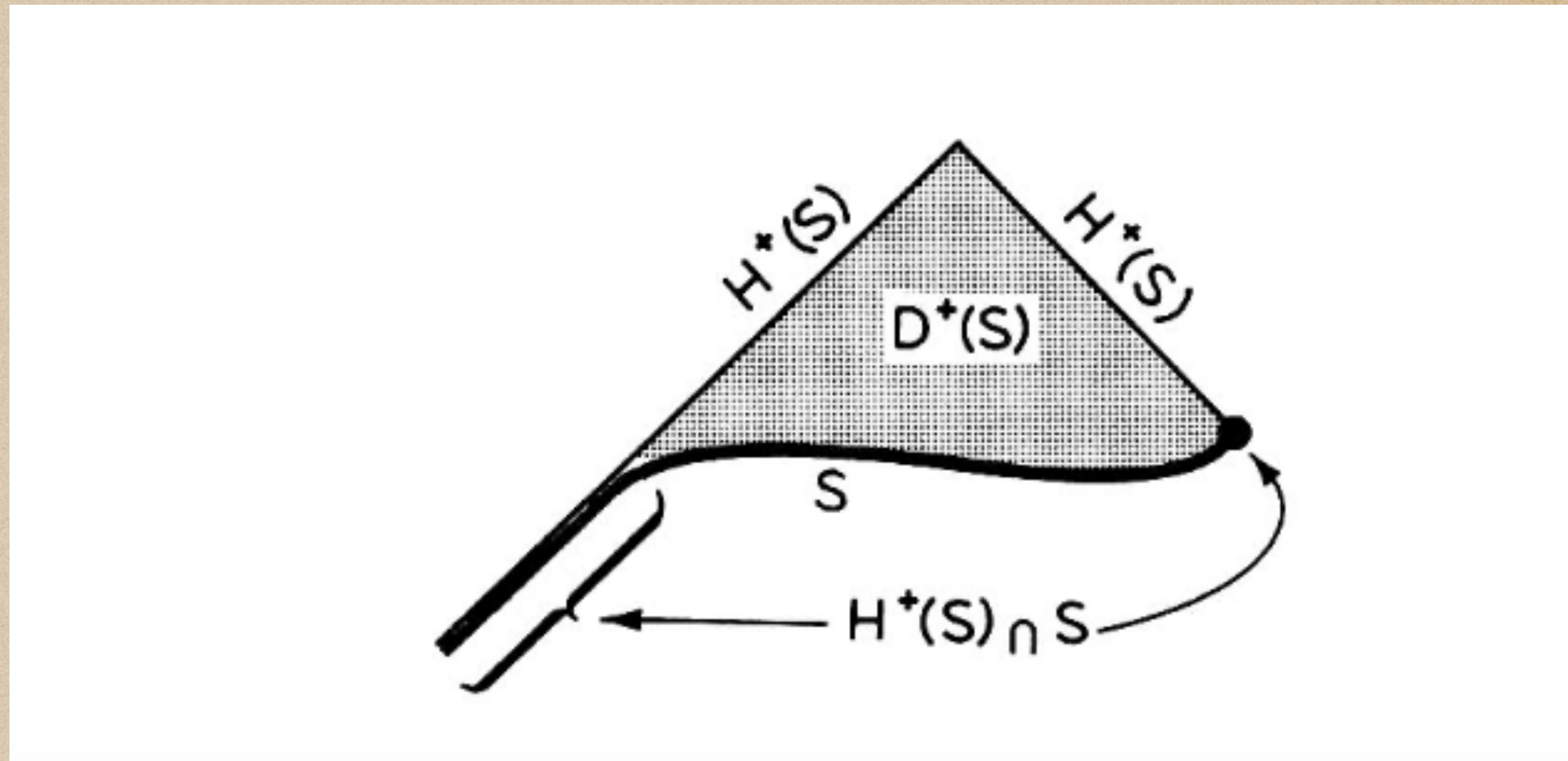


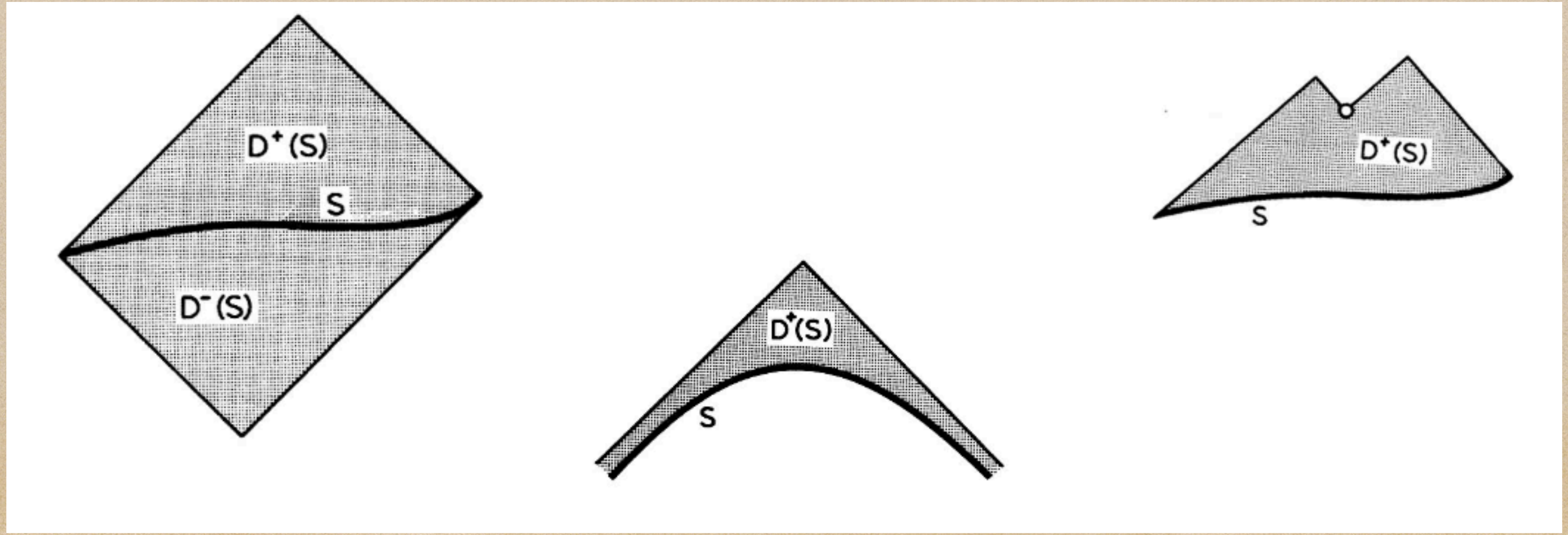
Fronteiras dos conjuntos futuros: A fronteira $\partial J^+(S) = \partial I^+(S)$ é gerada por geodésicas tipo-luz que ou são inextensíveis para o passado ou têm ponto final em S

Estrutura Causal

Causalidade—Domínio de Dependência e Superfícies de Cauchy

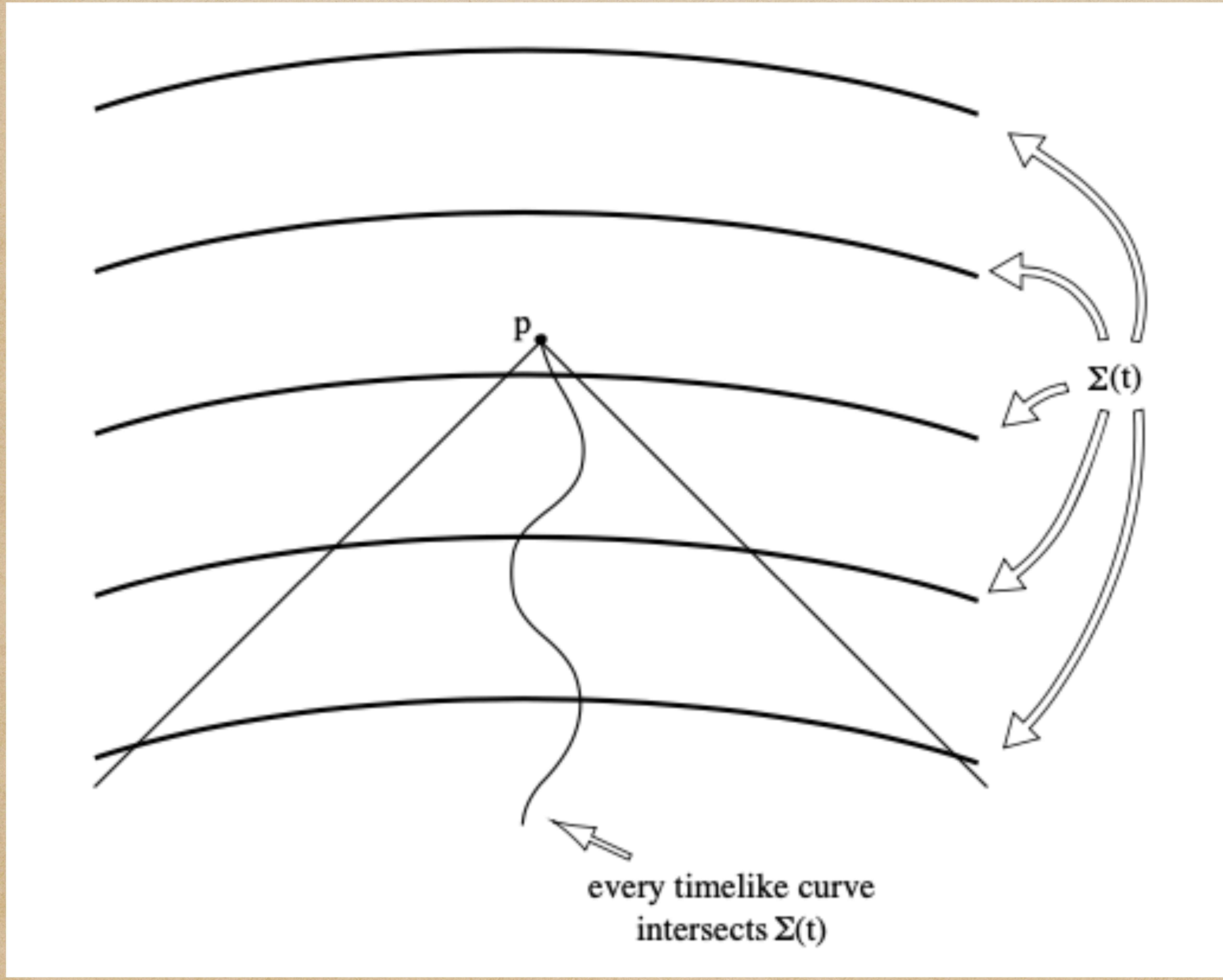






Estrutura Causal

Causalidade—Domínio de Dependência e Superfícies de Cauchy



Superfície de Cauchy: Hiperfície Σ que satisfaz $D(\Sigma) \equiv D^{+}(\Sigma) \cup D^{-}(\Sigma) = \mathscr{M}$.

Um espaço-tempo $(\mathscr{M}, g)$ que admite uma superfície de Cauchy é dito Globalmente Hiperbólico