TQC EM ESPAÇOS-TEMPOS CURVOS

SEJA (M, g_{ab}) UM ESPAÇO-TEMPO GLOBALMENTE HIPERBÓLICO, ENTÃO $M \simeq \mathbb{R}\times\Sigma$ E EXISTE UMA FUNÇÃO DIF. $t: M \to \mathbb{R}$ t.q. $\Sigma_{t=cte} = \{p\in M \mid t(p) = cte\}$ SÃO SUPERFÍCIES DE CAUCHY.

UM CAMPO ESCALAR (SPIN-0) E MASSA m EM (M, g_{ab}) SATISFAZ A EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON:

$$(-\nabla_a\nabla^a + m^2)\phi = 0, \qquad (1)$$

ONDE ∇_a É A DERIVADA COVARIANTE SEM TORÇÃO COMPATÍVEL COM g_{ab} (i.e. $\nabla_a\nabla_b f = \nabla_b\nabla_a f$ E $\nabla_a g_{bc} = 0$). DADAS COORDENADAS QUAISQUER $\{x^\mu\}$ EM M ENTÃO

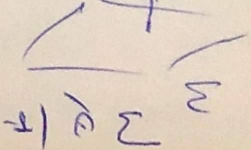
$$\nabla^a\nabla_a\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi\right), \qquad (2)$$

ONDE $g_{\mu\nu} = g(\partial_\mu, \partial_\nu)$ SÃO OS COMPONENTES DA MÉTRICA NAS COORD. $\{x^\mu\}$ E $-g = -\det g_{\mu\nu}$.

PARA A Eq. (1), VALE O SEGUINTE:

TEOREMA 1: SE (M, g_{ab}) É GLOBALMENTE HIPERBÓLICO COM SUP. DE CAUCHY Σ, ENTÃO, DADOS (ϕ_0, π_0), ϕ_0 E π_0 FUNÇÕES $C^\infty(\Sigma)$, EXISTE UMA ÚNICA SOLUÇÃO $\phi \in C^\infty(M)$ DA Eq. (1) t.q.

$$\phi|_\Sigma = \phi_0 \quad \text{E} \quad n^a\nabla_a\phi|_\Sigma = \pi_0,$$



ONDE n^a É A NORMAL UNITÁRIA ($n^a n_a = g_{ab}n^a n^b = -1$) À Σ

DADO DUAS SOLUÇÕES ϕ_1 E ϕ_2 DE (1) [E VAMOS DENOTAR O ESPAÇO DE SOLUÇÕES DA Eq. (1) por S] ENTÃO DEFINIMOS

$$\Omega(\phi_1,\phi_2) \equiv \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{h}\, \left(\phi_2\, n^a \nabla_a \phi_1 - \phi_1\, n^a \nabla_a \phi_2\right), \quad (3)$$

ONDE $h_{ab} = g_{ab}|_{\Sigma}$ (i.e. A MÉTRICA INDUZIDA EM Σ_t), $h = \det h_{ab}$, $\{x^i\}$ SÃO COORDENADAS SOBRE Σ_t.

EXERCÍCIO: MOSTRE QUE $\frac{d}{dt}\Omega(\phi_1,\phi_2) = 0$ [OU, EQUIVALENTEMENTE, QUE

$$\int_{\Sigma_{t_1}} d^3x \sqrt{h}\, \left(\phi_2\, n^a \nabla_a \phi_1 - \phi_1\, n^a \nabla_a \phi_2\right) = \int_{\Sigma_{t_2}} d^3x \sqrt{h}\, \left(\phi_2\, n^a \nabla_a \phi_1 - \phi_1\, n^a \nabla_a \phi_2\right)$$]

(SUGESTÃO: USE A Eq. (1) E O TEOREMA DE GAUSS).

TEMOS ENTÃO NOSSO PAR (S,Ω). PODEMOS AGORA SEGUIR OS PASSOS USUAIS (JÁ DESCRITOS P/ O OSCILADOR HARMÔNICO) PARA QUANTIZAR O CAMPO.

VAMOS COMPLEXIFICAR S, i.e., $S \to S^{\mathbb{C}}$ E DEFINIR EM $S^{\mathbb{C}}$ O PRODUTO INTERNO DE KLEIN-GORDON:

$$\langle f_1, f_2 \rangle_{K.G} \equiv -i\,\Omega(\bar{f}_1, f_2), \quad f_1, f_2 \in S^{\mathbb{C}}$$

AGORA TOMEMOS QUALQUER $\mathcal{H} \subset S^{\mathbb{C}}$ Tq:

(1) $S^{\mathbb{C}} = \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$;

(2) $\langle \cdot , \cdot \rangle_{K.G}$ É POSITIVO-DEFINIDO EM $\mathcal{H}$ E, PORTANTO, $(\mathcal{H}, \langle \cdot , \cdot \rangle_{K.G})$ É UM ESPAÇO DE HILBERT.

(3) PARA TODO $f_1 \in \mathcal{H}$ E $f_2 \in \overline{\mathcal{H}}$ VALE $\langle f_1, f_2 \rangle_{K.G} = 0$.

SENDO TAL $\mathcal{H}$, O ESPAÇO DE "1-PARTÍCULA", DEFINIMOS O ESPAÇO DE ESTADOS DO CAMPO COMO SENDO $\mathcal{F}_S(\mathcal{H}) = \mathbb{C} \oplus \mathcal{H} \oplus (\mathcal{H} \otimes_S \mathcal{H}) \oplus \ldots$

O CAMPO QUANTIZADO SERÁ O OPERADOR

$$\phi(x) = \sum_j \left(u_j \, a(\overline{u}_j) + \overline{u}_j \, a^{\dagger}(u_j) \right) \qquad (4)$$

ONDE $\{u_j\}$ É UMA BASE ORTONORMAL DE $\mathcal{H}$ (I.E., $\langle u_i, u_j \rangle_{K.G} = \delta_{ij}$), LEMBRANDO QUE

$$[a(\overline{\sigma}), a^{\dagger}(x)] = \langle \sigma, x \rangle_{K.G} \, I \qquad (5)$$

O ESTADO DE VÁCUO DA CONSTRUÇÃO É O VETOR

$$|0\rangle = \Psi_0 = (1, 0, \ldots) \quad \text{Tq} \quad a(\overline{\sigma})|0\rangle = 0, \ \forall \sigma \in \mathcal{H}.$$

PARA TERMINARMOS A QUANTIZAÇÃO, SERÁ ÚTIL COLOCAR O OPERADOR ϕ EM UM FORMATO QUE SERÁ ÚTIL NA DESCRIÇÃO DE DETETORES (ENTRE OUTROS CASOS).

SE $K: S^{\mathbb{C}} \to \mathcal{H}$ É O OP. QUE TOMA A PARTE DE NORMA POSITIVA DE $\varphi \in S^{\mathbb{C}}$, I.E., $\varphi = \varphi^{+} + \varphi^{-}$, COM $\varphi^{+} \in \mathcal{H}$ E $\varphi^{-} \in \overline{\mathcal{H}}$ ENTÃO $K\varphi = \varphi^{+}$. ANALOGAMENTE $\overline{K}: S^{\mathbb{C}} \to \overline{\mathcal{H}}$ TOMA A PARTE de norma negativa de φ, i.e. $\bar{K}\varphi \equiv \varphi^-$. Se $\varphi \in S \subset S^{\mathbb{C}}$, i.e., φ é real, $\overline{\varphi^-} = \varphi^+$ e $\bar{K}\varphi \equiv \varphi^- = \overline{\varphi^+} = \overline{K\varphi}$.

Se $\{u_j\}$ é ~~base~~ ort. de $\mathcal{H}$, então

$$\varphi = \sum_j \langle u_j, \varphi\rangle_{KG}\, u_j - \langle \bar{u}_j, \varphi\rangle_{KG}\, \bar{u}_j \qquad (6)$$

e

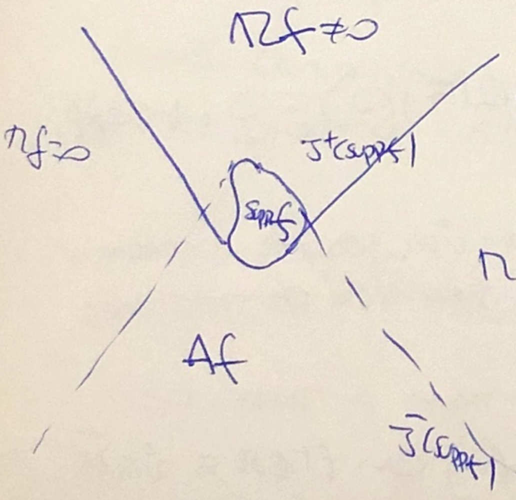
$$K\varphi = \sum_j \langle u_j, \varphi\rangle u_j \quad \text{e} \quad \bar{K}\varphi = -\sum_j \langle u_j, \varphi\rangle \bar{u}_j$$

Se $f \in C_0^\infty(M)$, i.e., f é suave e de suporte compacto (suporte é o (fecho) dos pontos onde $f(p) \neq 0$), e se $G_A(x,x')$ e $G_R(x,x')$ são as funções de Green avançada e retardada do operador $(-\nabla^a\nabla_a + m^2)$, ou seja:

$$(-\nabla^a\nabla_a + m^2)\, G_R(x,x') = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \delta(x,x') \equiv \delta_M(x,x')$$

$$(-\nabla^a\nabla_a + m^2)\, G_A(x,x') = \frac{1}{\sqrt{-g}}\, \delta(x,x') = \delta_M(x,x')$$

(de tal forma que $\int \underbrace{\delta_M(x,x')}_{\frac{1}{\sqrt{-g'}}\delta(x',x)} \sqrt{-g'}\, dx' = 1$)



com

$$Rf(x) \equiv \int_M \sqrt{-g}\, d^4x'\, G_R(x,x') f(x'), \text{ onde}$$

Rf tem suporte em $J^+(\text{supp} f)$ (i.e., propaga f p/ o futuro)

$$(-\nabla^a\nabla_a + m^2) Rf = f$$

ANALOGAMENTE

$$Af(x) = \int_M \sqrt{-g}\, G_A(x,x')\, f(x')$$

TEM SUPORTE EM $J^-(\mathrm{supp} f)$, i.e., Af PROPAGA f P/ O PASSADO E

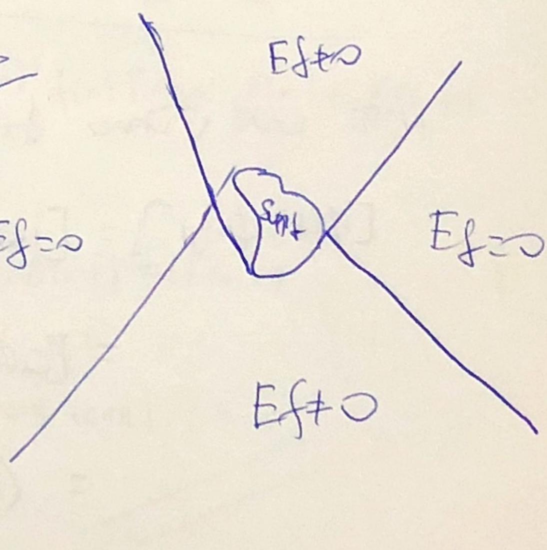
$$(-\nabla^a \nabla_a + m^2) Af = f$$

ASSIM, Rf E Af SÃO SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON COM FONTE f. VEMOS ENTÃO QUE

$$Ef(x) \equiv Af(x) - Rf(x) \equiv \int_M \sqrt{-g}\, d^4x' \left(G_A(x,x') - G_R(x,x') \right) f(x')$$

DEFINE UMA SOLUÇÃO DA Eq. (1):

$$(-\nabla^a \nabla_a + m^2) Ef = 0$$



EXISTE UMA IDENTIDADE MUITO ÚTIL QUE RELACIONA O PRODUTO INTERNO DE KLEIN-GORDON COM UMA INTEGRAL NO ESPAÇO-TEMPO TODO (VEJA APÊNDICE)

$$\begin{cases} \displaystyle\int_M \bar{u}_j f \sqrt{-g}\, d^4x = -i \langle u_j, Ef \rangle_{K\text{-}G} \\ \displaystyle\int_M u_j f \sqrt{-g}\, d^4x = -i \langle \bar{u}_j, Ef \rangle_{K\text{-}G}. \end{cases} \qquad (7)$$

(u_j É QUALQUER SOLUÇÃO DA Eq. (1))

NOTE ENTÃO QUE

$$\phi(f) \equiv \int_M \sqrt{g}\, d^4x\, \phi(x) f(x) = \sum_j \Big[\underbrace{\int_M u_j f \sqrt{g}\, d^4x}^{-i\langle \bar{u}_j, Ef\rangle_{KG}} a(u_j) + \underbrace{\int_M \bar{u}_j f \sqrt{g}\, d^4x}^{-i\langle u_j, Ef\rangle_{KG}} a^\dagger(u_j) \Big]$$

LOGO

$$\phi(f) = i \sum_j \Big[-\langle \bar{u}_j, Ef\rangle_{KG}\, a(\bar{u}_j) - \langle u_j, Ef\rangle_{KG}\, a^\dagger(u_j) \Big]$$

$$= i\, a\Big(\underbrace{-\sum_j \langle \bar{u}_j, Ef\rangle_{KG}\, \bar{u}_j}_{\overline{KEf} \equiv \overline{KEf}} \Big) - i\, a^\dagger \Big(\underbrace{\sum_j \langle u_j, Ef\rangle_{KG}\, u_j}_{KEf} \Big)$$

PORTANTO

$$\boxed{\phi(f) = i\, a(\overline{KEf}) - i\, a^\dagger(KEf)} \quad (8)$$

NOTE QUE, DADO f E g DIF. E DE SUPORTE COMPACTO, TEMOS

$$[\phi(f), \phi(g)] = [i a(\overline{KEf}) - i a^\dagger(KEf),\ i a(\overline{KEg}) - i a^\dagger(KEg)]$$

$$= [a(\overline{KEf}), a^\dagger(KEg)] + [a^\dagger(KEf), a(\overline{KEg})]$$

$$= \langle KEf, KEg\rangle_{KG} - \langle KEg, KEf\rangle_{KG}$$

$$= \langle KEf, KEg\rangle_{KG} - \overline{\langle KEf, KEg\rangle_{KG}}$$

LOGO

$$[\phi(f), \phi(g)] = 2i\, \mathrm{Im}\{\langle KEf, KEg\rangle_{KG}\}$$

NOTE QUE: (1) $\langle \overline{KEf}, \overline{KEg} \rangle_{KG} = -i\Omega(\overline{KEf}, \overline{KEg}) = i\Omega(\overline{KEg}, \overline{KEf}) = -\langle KEg, KEf \rangle_{KG}$

LOGO $\langle \overline{KEf}, \overline{KEg} \rangle_{KG} = -\overline{\langle KEf, KEg \rangle}$

(2) $\langle Ef, Eg \rangle_{KG} = \langle KEf + \overline{KEf}, KEg + \overline{KEg} \rangle_{KG}$

$= \langle KEf, KEg \rangle + \langle \overline{KEf}, \overline{KEg} \rangle$

$\underset{(1)}{=} \langle KEf, KEg \rangle_{KG} - \overline{\langle KEf, KEg \rangle}_{KG}$

LOGO

$\langle Ef, Eg \rangle_{KG} = 2i \,\mathrm{Im} \langle KEf, KEg \rangle_{KG}$

(3) USANDO (7)

$$\langle Ef, Eg \rangle_{KG} = -i \int_M \sqrt{-g}\, d^4x\, Ef(x) g(x) = -i \int_M \sqrt{-g}\, d^4x \int_M \sqrt{-g}\, d^4x'\, g(x) \underbrace{E(x,x')}_{=E(x',x)} f(x')$$

$$\underset{x \leftrightarrow x'}{=} i \int_M \sqrt{-g}\, d^4x \int \sqrt{-g}\, d^4x'\, f(x) E(x,x') g(x) \equiv E(f,g)$$

ASSIM

$$[\phi(f), \phi(g)] = iE(f,g) \quad \text{OU} \quad [\phi(x), \phi(x')] = iE(x,x')$$

COM $E(x,x') = G_A(x,x') - G_R(x,x')$

RELAÇÕES DE COMUTAÇÃO CANÔNICAS (CCR)

COVARIANTE P/ O CAMPO ϕ

OBS: SE f FOR COMPLEXA ENTÃO:

$\phi(\mathrm{Re}f) = iQ(\overline{KE\mathrm{Re}f}) - iQ^{\dagger}(KE\mathrm{Re}f)$

$\phi(\mathrm{Im}f) = iQ(\overline{KE\mathrm{Im}f}) - iQ^{\dagger}(KE\mathrm{Im}f)$

LOGO, COMO $f = \mathrm{Re}f + i\,\mathrm{Im}f$, TEMOS:

$$\phi(f) = iQ(\overline{KEf}) - iQ^{\dagger}(KEf) \qquad (9)$$

TRANSFORMAÇÕES DE BOGOLIUBOV

A DECOMPOSIÇÃO DE $S^{\mathbb{C}}$ COMO $S^{\mathbb{C}} = \mathcal{H} \oplus \overline{\mathcal{H}}$ SATISFAZENDO (1)-(3) NÃO É ÚNICA: EXISTEM INFINITAS ESCOLHAS DE $\mathcal{H}$ SATISFAZENDO (1)-(3). COMO ESCOLHER $\mathcal{H}$ ESTÁ 1-1 COM $|0\rangle$, $(a(\bar{x}), a^{\dagger}(x))$, ENTÃO TEMOS INFINITAS ESCOLHAS DIFERENTES DE VÁCUO E EXCITAÇÕES SOBRE TAL VÁCUO (QUE, EM CERTAS SITUAÇÕES, PODEM SER INTERPRETADOS COMO PARTÍCULAS).

TAL ARBITRARIEDADE NA ESCOLHA DE $\mathcal{H}$ (E DE VÁCUO) NÃO IMPÕE NENHUMA DIFICULDADE NA FORMULAÇÃO DA TEORIA. SERÃO SOMENTE DESCRIÇÕES DIFERENTES P/ O MESMO FENÔMENO/ESTADO FÍSICO.

NO ENTANTO, COMO VEREMOS ADIANTE, SE (M, g_{ab}) POSSUI SIMETRIAS, TAIS SIMETRIAS PERMITEM ESCOLHAS "NATURAIS" DE $\mathcal{H}$ (E, PORTANTO, DE VÁCUO $|0\rangle$).

SEJAM ENTÃO DOIS $\mathcal{H}_1$ E $\mathcal{H}_2$ SATISFAZENDO (1)-(3). ENTÃO $S^{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_1 \oplus \overline{\mathcal{H}}_1$ E $S^{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_2 \oplus \overline{\mathcal{H}}_2$ COM, DADO $\varphi \in S^{\mathbb{C}}$, TEMOS

~~$K_1 \varphi \in S^{\mathbb{C}}$~~

$$\begin{cases} K_1 : S^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{H}_1 \\ \quad \varphi \in S^{\mathbb{C}} \longrightarrow K_1 \varphi = \varphi_1^+ \in \mathcal{H}_1 \\ \overline{K}_1 : S^{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_1 \\ \quad \varphi \in S^{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{K}_1 \varphi = \varphi_1^- \in \overline{\mathcal{H}}_1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} K_2 : S^{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathcal{H}_2 \\ \quad \varphi \in S^{\mathbb{C}} \longrightarrow K_2 \varphi = \varphi_2^+ \in \mathcal{H} \\ \overline{K}_2 : S^{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathcal{H}}_2 \\ \quad \varphi \in S^{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{K}_2 \varphi = \varphi_2^- \in \overline{\mathcal{H}}_2 \end{cases}$$

SE $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_1)$ E $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_2)$ SÃO OS RESPECTIVOS ESPAÇOS DE FOCK ENTÃO

$$\phi_1 = \sum_j \left[u_j \, a_1(\bar{u}_j) + \bar{u}_j \, a_1^{\dagger}(u_j) \right] \quad ; \{u_j\} : \text{BASE ORTONORMAL DE } \mathcal{H}_1$$

ANALOGAMENTE DEFINIMOS $A: \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1$ E $B: \mathcal{H}_2 \to \overline{\mathcal{H}_1}$

COMO
$$A\varphi_2 \equiv \underbrace{K_1 \varphi_2}_{\in \mathcal{H}_1} \, , \, B\varphi_2 \equiv \underbrace{\overline{K}_1 \varphi_2}_{\in \overline{\mathcal{H}}_1} \, , \, \varphi_2 \in \mathcal{H}_2$$

LOGO

$$A\varphi_2 = \sum_j \langle u_j , \varphi_2 \rangle_{KG} u_j \quad ; \quad B\varphi_2 = -\sum_j \langle \overline{u}_j , \varphi_2 \rangle \overline{u}_j$$

ASSIM VEMOS QUE (11a) E (11b) FICAM

$$U a_1(\overline{u}_k) U^\dagger = a_2\left(\overline{\sum_j \langle v_j , u_k \rangle v_j} \right) - a_2^\dagger \left(\overline{\sum_j \langle \overline{v}_j , u_k \rangle \overline{v}_j} \right),$$

$$U a_1(\overline{u}_k) U^\dagger = a_2(\overline{C u_k}) - a_2^\dagger(\overline{D u_k})$$

E

$$U^\dagger a_2(\overline{v}_k) U = a_1(\overline{A v_k}) - a_1^\dagger(\overline{B v_k})$$

COMO AS RELAÇÕES ACIMA VALEM P/ UMA BASE TEMOS QUE, DADO $\sigma \in \mathcal{H}_1$ E $\chi \in \mathcal{H}_2$ TEMOS

$$U a_1(\overline{\sigma}) U^\dagger = a_2(\overline{C\sigma}) - a_2^\dagger(\overline{D\sigma}) \qquad (12a)$$

$$U^\dagger a_2(\overline{\chi}) U = a_1(\overline{A\chi}) - a_1^\dagger(\overline{B\chi}) \qquad (12b)$$

SE $|0\rangle_1$ É O VÁCUO NA DESCRIÇÃO 1 (i.e., $a(\overline{\sigma})|0\rangle_1 = 0$ P/ TODO $\sigma \in \mathcal{H}_1$) ENTÃO ESSE ESTADO É DESCRITO EM 2 ($\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_2)$) COMO O ESTADO

$$\Psi_0^1 \equiv U|0\rangle_1$$

$$\phi_2(x) = \sum_j \left(v_j\, a_2(\bar{v}_j) + \bar{v}_j\, a_2^\dagger(v_j) \right), \quad \{v_j\} \text{ BASE ORT. DE } \mathcal{H}_2$$

QUEREMOS ACHAR A FORMA EXPLÍCITA DO OPERADOR UNITÁRIO $U: \mathcal{F}_s(\mathcal{H}_1) \rightarrow \mathcal{F}_s(\mathcal{H}_2)$ QUE LIGA AS DUAS CONSTRUÇÕES, I.E.,

$$U \phi_1 U^\dagger = \phi_2 \quad ; \quad \text{LOGO}$$

$$U\left(\sum_j \left[u_j\, a_1(\bar{u}_j) + \bar{u}_j\, a_1^\dagger(u_j) \right] \right) U^\dagger = \sum_j \left(v_j\, a_2(\bar{v}_j) + \bar{v}_j\, a_2^\dagger(v_j) \right) \quad (10)$$

TOMANDO O PRODUTO ESCALAR DE (10) COM u_k TEMOS

$$U a_1(\bar{u}_k) U^\dagger = \sum_j \left[\langle u_k, v_j \rangle_{K.G}\, a_2(\bar{v}_j) + \langle u_k, \bar{v}_j \rangle_{K.G}\, a_2^\dagger(v_j) \right] \quad (11a)$$

ANALOGAMENTE

$$U^\dagger a_2(\bar{v}_k) U = \sum_j \left[\langle v_k, u_j \rangle_{K.G}\, a_1(\bar{u}_j) + \langle v_k, \bar{u}_j \rangle_{K.G}\, a_1^\dagger(u_j) \right] \quad (11b)$$

AGORA, DADO $\varphi \in \mathcal{H}_1$ VAMOS DEFINIR $C: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ E $D: \mathcal{H}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{H}}_2$ COMO

$$C\varphi \equiv K_2 \varphi \quad ; \quad D\varphi \equiv \bar{K}_2 \varphi$$

LOGO

$$C\varphi = \sum_j \langle v_j, \varphi \rangle v_j \quad ; \quad D\varphi = -\sum_j \langle \bar{v}_j, \varphi \rangle \bar{v}_j$$

(I.E. C E D SÃO AS RESTRIÇÕES DE K_2 E $\bar{K}_2$ À $\mathcal{H}_1$)

LOGO C TOMA A PARTE DE NORMA POSITIVA COM RELAÇÃO À $\mathcal{H}_2$ DAS SOLUÇÕES QUE SÃO DE NORMA POSITIVA EM $\mathcal{H}_1$.

JÁ D TOMA A PARTE DE NORMA NEGATIVA COM RELAÇÃO À $\mathcal{H}_2$ DE SOLUÇÕES QUE SÃO PURAMENTE DE NORMA POSITIVA COM RELAÇÃO À $\mathcal{H}_1$.

NOTE ENTÃO QUE

$$ {}_{1}\langle \psi_0^1 | a_2^\dagger(v_k) a_2(\bar{v}_k) | \psi_0^1 \rangle = {}_1\langle 0 | U^\dagger a_2^\dagger(v_k) a_2(\bar{v}_k) U | 0 \rangle_1 $$

USANDO (12b) TEMOS (ALÉM DE QUE $a_1(\sigma)|0\rangle_1 = 0, \forall \sigma \in H_1$

$$ \langle \psi_0^1 | a_2^\dagger(v_k) a_2(\bar{v}_k) | \psi_0^1 \rangle = {}_1\langle 0 | (a_1^\dagger(Av_k) - a_1(B\bar{v}_k))(a_1(A\bar{v}_k) - a_1^\dagger(B\bar{v}_k)) | 0 \rangle_1 $$

$$ = {}_1\langle 0 | a_1(Bv_k) a_1^\dagger(B\bar{v}_k) | 0 \rangle_1 $$

$$ \underset{\uparrow}{=} {}_1\langle 0 | \left(a_1^\dagger(B\bar{v}_k) a_1(Bv_k) + \langle Bv_k, Bv_k \rangle_{KG} I \right) | 0 \rangle_1 $$

$[a_1(\sigma), a_1^\dagger(\varepsilon)] = \langle \sigma, \varepsilon \rangle_{KG} I$

LOGO

$$ \langle \psi_0^1 | a_2^\dagger(v_k) a_2(\bar{v}_k) | \psi_0^1 \rangle = \| Bv_k \|^2 = \sum_j | \langle \bar{u}_j, v_k \rangle |^2 $$

É COMUM DENOTARMOS

$$ \begin{cases} Av_k = \sum_j \underbrace{\langle u_j, v_k \rangle_{KG}}_{\alpha_{jk}} u_j \equiv \sum_j \alpha_{jk} u_j \\ Bv_k = -\sum_j \underbrace{\langle \bar{u}_j, v_k \rangle}_{\beta_{jk}} \bar{u}_j \equiv -\sum_j \beta_{jk} \bar{u}_j \end{cases} $$

LOGO

$$ \boxed{ \langle \psi_0^1 | a_2^\dagger(v_k) a_2(\bar{v}_k) | \psi_0^1 \rangle = \sum_j | \beta_{jk} |^2 } \quad (13) $$

AS TRANSFORMAÇÕES A, B, C E D, SÃO CHAMADAS TRANSFORMAÇÕES DE BOGOLIUBOV
junto com U

USANDO A Eq. (12) VEMOS QUE

$$0 = U \underbrace{a_1(\sigma) U^+ \Psi_0^1}_{U|0\rangle_1} = a_2(\overline{C\sigma})\Psi_0^1 - a_2^+(\overline{D\sigma})\Psi_0^1$$

LOGO

$$\boxed{a_2(\overline{C\sigma})\Psi_0^1 = a_2^+(\overline{D\sigma})\Psi_0^1} \qquad (14)$$

TOMANDO $\sigma = C^{-1}\xi$, COM $\xi \in H_2$ QUALQUER ~~...~~ TEMOS

$$a_2(\xi)\Psi_0 = a_2^+(\overline{DC^{-1}\xi})\Psi_0$$

DEFININDO $\mathcal{E}\xi = \overline{DC^{-1}\xi}$ $(\mathcal{E}: \overline{H}_2 \to H_2)$ TEMOS

$$\boxed{a_2(\xi)\Psi_0^1 = a_2^+(\mathcal{E}\xi)\Psi_0^1} \qquad (15)$$

A Eq. (15) VAI NOS PERMITIR ACHAR A FORMA EXPLÍCITA DE $U|0\rangle_1 = \Psi_0^1$. USANDO AS FORMAS EXPLÍCITAS DE $a_2(\xi)$ E $a_2^+(x)$ TEMOS

$$\Psi_0^1 = (c, \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \dots)$$

$$a_2(\xi)\Psi_0^1 = (\langle \xi, \Psi_1\rangle_{K.G}, \sqrt{2}\,\xi\cdot\Psi_2, \sqrt{3}\,\xi\cdot\Psi_3, \sqrt{4}\,\xi\cdot\Psi_4, \dots)$$

$$a_2^+(\mathcal{E}\xi)\Psi_0^1 = (0, c\,\mathcal{E}\xi, \sqrt{2}\,\mathcal{E}\xi\otimes_s\Psi_1, \sqrt{3}\,\mathcal{E}\xi\otimes_s\Psi_2, \sqrt{4}\,\mathcal{E}\xi\otimes_s\Psi_3, \dots$$

LOGO

$$\begin{cases} \langle \xi , \Psi_1 \rangle = 0 \quad , \forall \xi \in H_1 \Rightarrow \Psi_1 = 0 \\ \sqrt{2}\, \bar{\xi} \cdot \Psi_2 = c\, \varepsilon \bar{\xi} \\ \sqrt{3}\, \bar{\xi} \cdot \Psi_3 = \sqrt{2}\, \varepsilon \bar{\xi} \otimes_s \Psi_1 \Rightarrow \Psi_3 = 0 \quad (\text{JÁ QUE } \Psi_1 = 0) \\ \sqrt{4}\, \bar{\xi} \cdot \Psi_4 = \sqrt{3}\, \varepsilon \bar{\xi} \otimes_s \Psi_2 \\ \vdots \end{cases}$$

VEMOS ENTÃO QUE $\Psi_{2j+1} = 0$, $j = 0,1,2,\dots$

DE $\sqrt{2}\, \bar{\xi} \cdot \Psi_2 = c\, \varepsilon \bar{\xi}$,

DEFININDO $\epsilon \in H_2 \otimes_s H_2$ DADO POR $\epsilon = \sum_{ij} \varepsilon^{ij} v_i \otimes_s v_j$,
COM $\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{ji} = \langle v_i , \varepsilon \bar{v}_j \rangle$ E TOMANDO $\bar{\xi} = \bar{v}_j$ TEMOS

$$\sqrt{2}\, \bar{v}_j \cdot \Psi_2 = c\, \varepsilon \bar{v}_j \qquad (*)$$

COMO $\Psi_2 = \sum_{i,j'} \Psi_2^{ij'} v_i \otimes_s v_{j'}$ $(\Psi_2^{ij} = \Psi_2^{ji})$, $\bar{v}_j \cdot \Psi_2 = \sum_{j'} \Psi^{jj'} v_{j'}$

TOMANDO O PRODUTO ESCALAR DE $(*)$ COM v_i TEMOS

$$\sqrt{2}\, \Psi_2^{ij} = c \langle v_i , \varepsilon \bar{v}_j \rangle = c\, \varepsilon^{ij}$$

LOGO

$$\Psi_2 = \frac{c}{\sqrt{2}} \sum_{ij} \varepsilon^{ij} v_i \otimes_s v_j = \frac{c}{\sqrt{2}} \epsilon$$

VEMOS ENTÃO QUE

$$\sqrt{4}\, \bar{\xi} \cdot \Psi_4 = \sqrt{3}\, \varepsilon \bar{\xi} \otimes \left(\frac{c}{\sqrt{2}} \epsilon\right) \Rightarrow \Psi_4 = c \sqrt{\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2}}\, \epsilon \otimes_s \epsilon$$

E, POR INDUÇÃO:

$$\underset{m \text{ PAR}}{\Psi_m} = \frac{\sqrt{m!}}{2^{\frac{m}{2}} \left(\frac{m}{2}\right)!} \underbrace{\epsilon \otimes_s \cdots \otimes_s \epsilon}_{\frac{m}{2} \text{ VEZES}}$$

ASSIM

$$\psi_0' = c\left(1, 0, \frac{G}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0, \frac{\sqrt{m!}}{2^{\frac{m}{2}}\left(\frac{m}{2}\right)!} \underbrace{Gg \dots gG}_{\frac{m}{2} \text{ VEZES}}, 0, \dots\right)$$

OBS: REPRESENTAÇÃO DE ~~HEISENBERG~~ INTERAÇÃO

$H = H_0 + V(t)$; $|\psi_S(t)\rangle \equiv U(t)|\psi_S(0)\rangle$; $i\frac{dU}{dt} = HU$

CONHECIDA AS SOLUÇÕES E $U_0 = e^{-iH_0 t}$

$i\frac{dU_0}{dt} = H_0 U_0$,

DEFININDO

$|\psi_I(t)\rangle \equiv U_0^+(t) \underbrace{U(t)|\psi_S(0)\rangle}_{|\psi_S(t)\rangle}$; $A^I \equiv U_0^+ A_S U_0$, P/ TODO OBS. A_S

TEMOS

$$i\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = -\underbrace{U_0^+ H_0 U_0}_{H_0^I} \underbrace{U_0^+|\psi_S\rangle}_{|\psi_I\rangle} + \underbrace{U_0^+ H|\psi_S\rangle}_{U_0^+ H U_0 U_0^+|\psi_S\rangle} = -H_0^I|\psi_I\rangle + H^I|\psi_I\rangle$$

ASSIM

$$i\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = (\underbrace{H^I - H_0^I}_{V^I \equiv U_0^+ V U_0})|\psi_I\rangle = V^I|\psi_I\rangle$$

ASSIM

$$i\frac{d}{dt}|\psi_I(t)\rangle = V^I(t)|\psi_I\rangle \Longrightarrow |\psi_I(t)\rangle = T\exp\left\{-i\int_0^t dt' V_I(t')\right\}|\psi_S(0)\rangle$$

$$|\psi_I(0)\rangle = U_0^+(0)|\psi_S(0)\rangle = |\psi_S(0)\rangle$$

Capítulo 5

O Efeito Unruh e a Teoria da Informação Quântica

A partir desse capítulo, iremos estudar a teoria da informação quântica no contexto da teoria quântica de campos e em particular do efeito Unruh [1, 117, 118]. Isso permitirá estudar não só efeitos relativísticos na teoria da informação quântica no espaço-tempo de Minkowski, como fizemos até aqui, mas também em espaços-tempos curvos, como por exemplo, espaços-tempos que contém buracos negros.

Na Seção 5.1, faremos uma revisão sobre a teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos globalmente hiperbólicos e o efeito Unruh. Na Seção 5.2, estudaremos o emaranhamento e o teletransporte quando um dos qubits acelera uniformemente, via o efeito Unruh. Na seção 5.3, estudaremos as correlações clássica e quântica nesse mesmo contexto.

5.1 Teoria Quântica de Campos em Espaços-Tempos Curvos

Nessa seção, vamos fazer uma breve revisão sobre a teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos. Para uma revisão mais abrangente sobre o assunto, recomendamos as referências [1, 119, 120, 121]. Para nossos propósitos, é suficiente considerar um campo escalar real de massa m porém, o formalismo apresentado vale, com pequenas modificações, para outros campos, e.g., campo eletromagnético ou de Dirac.

Em um espaço-tempo (M, g_{ab}), a equação de Klein-Gordon, que descreve a propagação de um campo escalar ϕ de massa m, é dada por

$$\left(\nabla^a \nabla_a - m^2\right) \phi = 0, \tag{5.1}$$

onde ∇_a é a derivada covariante compatível com g_{ab}, i.e., $\nabla_c g_{ab} = 0$. A teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos estuda a propagação de campos quânticos em um espaço-tempo de fundo fixo bem como sua retro-ação no espaço-tempo. Antes de analisarmos a quantização do campo ϕ solução da equação (5.1), precisamos primeiro definir em que classe de espaços-tempos iremos realizá-la. O principal requisito (além da orientação temporal) é que o problema de valores iniciais da equação dinâmica para o campo escalar seja bem posto. Por isso, vamos nos restringir aos chamados *espaços-tempos globalmente hiperbólicos* [2, 3], i.e., espaços-tempos (M, g_{ab}), onde M é uma variedade diferenciável quadrimensional e g_{ab} uma métrica Lorentziana, tal que exista uma hiperfície tridimensional Σ que satisfaça $D(\Sigma) = M$. Aqui, dado um subconjunto $A \subset M$ qualquer, temos

$$D(A) \equiv \{p \in M | \text{toda curva causal inextensivel passando por } p \text{ intercepta } A\}\,, \qquad (5.2)$$

onde uma curva é dita causal se a tangente a cada um de seus pontos é um vetor tipo tempo ou tipo luz. O conjunto $D(A)$ é chamado desenvolvimento de Cauchy de A. Uma hiperfície Σ que satisfaz $D(\Sigma) = M$ é dita uma superfície de Cauchy. Todo espaço-tempo globalmente hiperbólico satisfaz [122, 123]:

Teorema 5.1.1. *Seja (M, g_{ab}) é um espaço tempo globalmente hiperbólico. Então ele é difeomorfo a $(\mathbb{R}\times\Sigma, g_{ab})$ e existe uma função diferenciável t e uma família Σ_t de superfícies de Cauchy tal que $\Sigma_{t=\mathrm{cte}} = \{p \in M | t(p) = \mathrm{cte}\}$.*

Como em um espaço-tempo globalmente hiperbólico toda curva causal inextensível se "registra" em Σ, é de se esperar que em tais espaços-tempos tenhamos um problema de valores iniciais bem posto. Isso de fato é verdade como garante o próximo teorema [3, 124].

Teorema 5.1.2. *Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo globalmente hiperbólico com superfície de Cauchy Σ. Então, se $(\phi_0, \pi_0) \in C^\infty(\Sigma) \times C^\infty(\Sigma)$, onde $C^\infty(\Sigma)$ indica o conjunto das funções reais definidas em Σ infinitamente diferenciáveis, existe uma única solução $\phi \in C^\infty(M)$ da equação (5.1) tal que $\phi|_\Sigma = \phi_0$ e $n^a\nabla_a\phi|_\Sigma = \pi_0$. Aqui, n^a é a normal unitária e futuro direta (i.e., que aponta na direção do futuro) de Σ.*

Vamos definir agora a forma bilinear anti-simétrica

$$\Omega(\phi_1, \phi_2) \equiv \int_{\Sigma_t} d\mathbf{x}\sqrt{h}\,(\phi_2 n^a \nabla_a \phi_1 - \phi_1 n^a \nabla_a \phi_2)\,, \qquad (5.3)$$

onde $h \equiv \det(h_{ab})$, h_{ab} é a métrica em Σ_t induzida por g_{ab}, $\mathbf{x}$ são coordenadas em Σ_t e ϕ_1, ϕ_2 são soluções infinitamente diferenciáveis da equação de Klein-Gordon cujos valores iniciais tem suporte compacto em Σ_t. (Nos restringimos a soluções que têm valores iniciais de suporte compacto para garantir que a integral acima seja convergente. Mais adiante, vamos considerar uma classe mais ampla de funções.) Estendendo Ω às soluções complexas da equação (5.1) por linearidade, definimos o *produto interno de Klein-Gordon* como

$$(f_1, f_2)_{KG} \equiv -i\Omega(\overline{f}_1, f_2). \qquad (5.4)$$

Note entretanto que $(.,.)_{KG}$ não é positivo definido. Usando a equação (5.1), mostra-se que o produto interno (5.4) não depende de qual superfície de Cauchy Σ_t foi escolhida para fazer a integração.

5.1.1 Quantização do Campo Escalar Real em Espaços-Tempos Globalmente Hiperbólicos

Antes de descrever a quantização do campo de Klein-Gordon em um espaço-tempo globalmente hiperbólico (M, g_{ab}), será conveniente fazer uma breve revisão sobre sua quantização no espaço tempo de Minkowski $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$. Vimos no capítulo anterior que a invariância de Poincaré implica que o espaço de Hilbert que descreve os estados (de uma partícula) de um campo de massa m e spin $s = 0$ é o $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p})$, que carrega uma representação unitária e irredutível de $\tilde{\mathcal{P}}_+^\uparrow$ dada por $(U(a,\Lambda)\phi)(\mathbf{p}) \equiv e^{-i\langle a,p\rangle}\phi(\Lambda^{-1}\mathbf{p})$, onde lembramos que $\Lambda \equiv \Lambda(A)$ e $p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Se ao invés de usarmos o espaço dos momentos $L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p})$ quisermos usar o espaço-tempo para descrever os estados do sistema, basta usarmos a transformada de Fourier e definir o espaço vetorial

$$H_{KG} \equiv \left\{ \phi(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \tilde{\phi}(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \omega_\mathbf{p} t)} \middle| \tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \right\}, \tag{5.5}$$

onde $\omega_\mathbf{p} \equiv p^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}$. Usando coordenadas cartesianas (t, x, y, z), a equação (5.1) pode ser escrita como

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\phi = 0. \tag{5.6}$$

Então, vemos que os elementos de H_{KG} são soluções da equação (5.6). O espaço complexo conjugado $\overline{H}_{KG}$ de H_{KG} é dado por

$$\overline{H}_{KG} \equiv \left\{ \varphi(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \tilde{\varphi}(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \omega_\mathbf{p} t)} \middle| \tilde{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p}) \right\}. \tag{5.7}$$

Com isso, podemos definir o espaço das soluções complexas $S_\mu^\mathbb{C}$ da equação (5.6) como $S_\mu^\mathbb{C} \equiv H_{KG} \oplus \overline{H}_{KG}$. Logo, se $\phi \in S_\mu^\mathbb{C}$ temos que

$$\phi(x) = \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \tilde{\phi}^+(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \omega_\mathbf{p} t)} + \int \frac{d\mathbf{p}}{\sqrt{2\omega_\mathbf{p}}} \tilde{\phi}^-(\mathbf{p}) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - \omega_\mathbf{p} t)}, \tag{5.8}$$

onde $\tilde{\phi}^+(\mathbf{p}), \tilde{\phi}^-(\mathbf{p}) \in L^2(\mathbb{R}^3, d\mathbf{p})$. Vemos, usando as equações (5.3) e (5.4) e a definição de H_{KG}, que se $\phi_1, \phi_2 \in S_\mu^\mathbb{C}$ então

$$(\phi_1, \phi_2)_{KG} = \int d\mathbf{p} \overline{\tilde{\phi}_1^+(\mathbf{p})} \tilde{\phi}_2^+(\mathbf{p}) - \int d\mathbf{p} \overline{\tilde{\phi}_1^-(\mathbf{p})} \tilde{\phi}_2^-(\mathbf{p}). \tag{5.9}$$

Consequentemente, vemos que os elementos de H_{KG} satisfazem: **(a)** se $f_1, f_2 \in H_{KG}$, $(f_1, f_2)_{KG} = \int d\mathbf{p} \overline{\tilde{f}_1^+(\mathbf{p})} \tilde{f}_2^+(\mathbf{p})$ e portanto H_{KG} é um espaço de Hilbert com relação ao produto interno de Klein-Gordon; **(b)** se $f_1 \in H_{KG}$ e $f_2 \in \overline{H}_{KG}$ então $(f_1, f_2)_{KG} = 0$. Portanto, a invariância de Poincaré nos permite escolher um sub-espaço H_{KG} das soluções da equação de Klein-Gordon que é um espaço de Hilbert com relação a $(.,.)_{KG}$, que expande, junto com seu complexo conjugado $\overline{H}_{KG}$, um espaço conveniente $S_\mu^\mathbb{C}$ das soluções complexas da equação (5.6) e cujos elementos de H_{KG} e $\overline{H}_{KG}$ são ortogonais com relação ao produto interno de Klein-Gordon.

Tendo o espaço de Hilbert H_{KG}, a quantização do campo é feita da seguinte forma. Tomamos o espaço de Fock simétrico $\mathfrak{F}_s\left(H_{KG}\right) \equiv \mathbb{C} \bigoplus_{n=1}^{\infty}\left(\bigotimes_{sk=1}^{n} H_{KG}\right)$, onde $\bigotimes_s$ indica o produto tensorial simétrico*, que será o espaço dos estados do campo quantizado ϕ. Este por sua vez será um operador hermitiano definido em $\mathfrak{F}_s\left(H_{KG}\right)$. Para definir o operador ϕ, vamos primeiro definir os operadores de aniquilação e criação como

$$a(\overline{\tau})\Psi \equiv ((\tau, \psi_1)_{KG}, \sqrt{2}\tau \cdot \psi_2, \sqrt{3}\tau \cdot \psi_3, ...) \tag{5.10}$$

e

$$a^{\dagger}(\sigma)\Psi \equiv (0, c\sigma, \sqrt{2}\sigma \otimes_s \psi_1, \sqrt{3}\sigma \otimes_s \psi_3, ...), \tag{5.11}$$

respectivamente, onde $\Psi = (c, \psi_1, \psi_2, \psi_3, ...) \in \mathfrak{F}_s\left(H_{KG}\right)$, $\sigma, \tau \in H_{KG}$ e dado $\psi_n \in \bigotimes_{sk=1}^{n} H_{KG}$, temos que $\sigma \cdot \psi_n \equiv (\sigma, \psi_n)_{KG} \in \bigotimes_{sk=1}^{n-1} H_{KG}$ (o produto interno é com relação ao primeiro espaço de Hilbert do produto tensorial). Vemos que os operadores $a(\overline{\tau})$ e $a^{\dagger}(\sigma)$ destroem e criam modos τ e σ do campo, respectivamente. Usando as equações (5.10) e (5.11) concluímos que

$$\left[a(\overline{\tau}), a^{\dagger}(\sigma)\right] = (\tau, \sigma)_{KG} I, \tag{5.12}$$

onde I é o operador identidade em $\mathfrak{F}_s\left(H_{KG}\right)$. O vetor $|0\rangle \in \mathfrak{F}_s\left(H_{KG}\right)$ que satisfaz

$$a(\overline{\tau})|0\rangle = 0 \tag{5.13}$$

para todo $\tau \in H_{KG}$ é chamado *estado de vácuo.* Se $\{u_j \in H_{KG} | j \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de H_{KG} (e portanto $\{\overline{u}_j \in H_{KG} | j \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal de $\overline{H}_{KG}$, com relação a $-(.,.)_{KG}$), o operador ϕ é definido como

$$\phi \equiv \sum_j \left(u_j a(\overline{u}_j) + \overline{u}_j a^{\dagger}(u_j)\right). \tag{5.14}$$

Tendo isolado os elementos essenciais da quantização do campo escalar real no espaço-tempo de Minkowski, estamos em condições de descrever a quantização do campo de Klein-Gordon em espaços-tempos globalmente hiperbólicos arbitrários. Basta então tomarmos qualquer sub-espaço H do espaço das soluções complexas da equação (5.1) que satisfaz:

(i) $S_{\mu}^{\mathbb{C}} = H \oplus \overline{H}$, onde $S_{\mu}^{\mathbb{C}}$ é um espaço de soluções complexas conveniente;

(ii) $(.,.)_{KG}$ é positivo definido em H e $(H, (.,.)_{KG})$ é um espaço de Hilbert;

(iii) para todo $f_1 \in H$ e $f_2 \in \overline{H}$, vale $(f_1, f_2)_{KG} = 0$.

Tendo o espaço de Hilbert H, procedemos como em Minkowski. Definimos os espaço de Fock $\mathfrak{F}_s(H)$, os operadores de aniquilação e criação, equações (5.10) e (5.11), respectivamente, e o operador campo, equação (5.14). A questão agora não é sobre a existência de um espaço de Hilbert H que satisfaça **(i)**, **(ii)** e **(iii)** mas sim que existem infinitos

*Se $\psi_1, \psi_2 \in H$ então $\psi_1 \otimes_s \psi_2 \equiv \frac{1}{2}\left[\psi_1 \otimes \psi_2 + \psi_2 \otimes \psi_1\right]$

espaços de Hilbert H e que (a menos que haja simetrias no espaço-tempo) nenhum deles é privilegiado. Veremos mais adiante que quando há simetria de translação temporal no espaço-tempo (ou seja, o espaço-tempo é estacionário), há uma escolha natural para H.

Para terminarmos a descrição da quantização do campo de Klein-Gordon, vamos colocar o operador campo em um forma que nos será mais útil a frente. Dado uma solução $\varphi \in S_\mu^{\mathbb{C}}$ da equação (5.1) temos que $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$, onde $\varphi^+ \in H$ e $\varphi^- \in \overline{H}$. Podemos então definir o operador $K : S_\mu^{\mathbb{C}} \to H$ dado por $K\varphi = \varphi^+$, ou seja, ele toma a parte de norma positiva da solução φ (analogamente, definimos o operador $\overline{K}\varphi \equiv \varphi^-$, que toma a parte de norma negativa de φ). Multiplicando a equação (5.14) com uma função real, diferenciável e de suporte compacto f, integrando formalmente e usando as relações (provadas no Apêndice D)

$$\begin{aligned} \int_M \overline{u}_j f \sqrt{-g} d^4x &= -i(u_j, Ef)_{KG}, \\ \int_M u_j f \sqrt{-g} d^4x &= -i(\overline{u}_j, Ef)_{KG}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

obtemos

$$\phi(f) = ia\left(\overline{KEf}\right) - ia^\dagger\left(KEf\right), \tag{5.16}$$

onde

$$Ef = \int d^4x' \sqrt{-g(x')}[G^{\text{adv}}(x,x') - G^{\text{ret}}(x,x')]f(x'),$$

com G^{adv} e G^{ret} sendo as funções de Green avançada e retardada, respectivamente [124], $\{u_j \in H_{KG} | j \in \mathbb{N}\}$ uma base ortonormal de H e usamos que $KEf = \sum_j (u_j, Ef)_{KG} u_j$.

Podemos estender a ação de ϕ para funções complexas g de suporte compacto. Se $g \in C_0^{\mathbb{C}\infty}(M)$, onde $C_0^{\mathbb{C}\infty}(M)$ indica o conjunto das funções complexas, infinitamente diferenciáveis de suporte compacto em M, definimos $\phi(g) \equiv \phi(\text{Re}g) + i\phi(\text{Im}g)$ e portanto, usando a equação (5.16), temos que[†]

$$\phi(g) = ia\left(\overline{KE\overline{g}}\right) - ia^\dagger\left(KEg\right). \tag{5.17}$$

5.1.2 Transformações de Bogoliubov

Suponha que $S_\mu^{\mathbb{C}}$ é o espaço das soluções da equação de Klein-Gordon em um espaço-tempo curvo globalmente hiperbólico (M, g_{ab}) e $H_1, H_2 \subset S_\mu^{\mathbb{C}}$ são espaços de Hilbert que satisfazem as condições **(i)**, **(ii)** e **(iii)** descritas na Seção 5.1.1. Sejam $K_k : S_\mu^{\mathbb{C}} \to H_k$ e $\overline{K}_k : S_\mu^{\mathbb{C}} \to \overline{H}_k$ os operadores que tomam a parte de norma positiva e negativa, respectivamente, com relação a H_k, $k \in \{1, 2\}$, e $a_k, a_k^\dagger$ os operadores de aniquilação e

[†]Isso nos permite definir o operador campo como uma distribuição que toma valores em operadores hermitianos (*operator valued distributions*). Como a série na equação (5.14) não converge em nenhum sentido razoável, a equação (5.17) deve substituir a equação (5.14) como definição do operador campo.

criação definidos em $\mathfrak{F}_s(H_k)$. Então, o operador campo pode ser escrito como

$$\phi_1 = \sum_j \left(u_j a_1(\overline{u}_j) + \overline{u}_j a_1^\dagger(u_j) \right) \tag{5.18}$$

ou como

$$\phi_2 = \sum_j \left(v_j a_2(\overline{v}_j) + \overline{v}_j a_2^\dagger(v_j) \right) \tag{5.19}$$

onde $\{u_j \subset H_1 | j \in \mathbb{N}\}$ e $\{v_j \subset H_2 | j \in \mathbb{N}\}$ formam bases ortonormais de H_1 e H_2, respectivamente. Queremos achar a forma explícita do operador unitário $U : \mathfrak{F}_s(H_1) \to \mathfrak{F}_s(H_2)$ que liga as duas construções, i.e., do operador unitário U tal que

$$U \sum_j \left(u_j a_1(\overline{u}_j) + \overline{u}_j a_1^\dagger(u_j) \right) U^\dagger = \sum_j \left(v_j a_2(\overline{v}_j) + \overline{v}_j a_2^\dagger(v_j) \right). \tag{5.20}$$

Convém observar que, muitas vezes, tal operador poderá existir apenas formalmente. Isso se dá porquê, em geral, diferentes escolhas de H's (que satisfazem as condições **(i)**, **(ii)** e **(iii)** descritas na Seção 5.1.1) levam a espaços de Fock que *não* são unitariamente equivalentes. Entretanto, isso não representa nenhuma dificuldade para a formulação da teoria quântica de campos em espaços-tempos curvos, como fica claro formulando-a através da abordagem algébrica [1].

Fazendo o produto interno de Klein-Gordon da equação (5.20) com u_k obtemos

$$U a_1(\overline{u}_k) U^\dagger = \sum_j \left[(u_k, v_j)_{KG} a_2(\overline{v}_j) + (u_k, \overline{v}_j)_{KG} a_2^\dagger(v_j) \right]. \tag{5.21}$$

Agora, para todo $\varphi \in H_1$, vamos definir os operadores

$$C\varphi \equiv K_2 \varphi, \ D\varphi \equiv \overline{K}_2 \varphi.$$

Ou seja, C e D são as restrições à H_1 dos operadores K_2 e $\overline{K}_2$, respectivamente. Portanto, eles tomam a parte de norma positiva e negativa dos elementos de H_1 com relação a H_2. De maneira análoga, definimos os operadores $A : H_2 \to H_1$ e $B : H_2 \to \overline{H}_1$ que tomam a parte de norma positiva e negativa, respectivamente, com relação a H_1 dos elementos de H_2.

Com isso, vemos que a equação (5.21) é a expressão da equação

$$U a_1(\overline{\sigma}) U^\dagger = a_2(\overline{C\sigma}) - a_2^\dagger(\overline{D\sigma}) \tag{5.22}$$

na base $\{v_j \subset H_2 | j \in \mathbb{N}\}$, onde $\sigma \in H_1$ e lembramos que $C\sigma \equiv K_2\sigma = \sum_j (v_j, \sigma) v_j$ e $D\sigma \equiv \overline{K}_2 \sigma = -\sum_j (\overline{v}_j, \sigma) v_j$. Tomemos o estado de vácuo $|0\rangle \in \mathfrak{F}_s(H_1)$ e seu vetor correspondente em $\mathfrak{F}_s(H_2)$, i.e., $\Psi_0 \equiv U|0\rangle$. Dado $\xi \in H_2$ qualquer, defina $\sigma \equiv C^{-1}\xi$ (os operadores A, B, C e D são inversíveis. Para ver isso e outras propriedades ver [1]). Então, podemos colocar a equação (5.22) na forma

$$a(\overline{\xi})\Psi_0 = a^\dagger(\mathcal{E}\overline{\xi})\Psi_0, \tag{5.23}$$

onde definimos o operador $\mathcal{E} : \overline{H}_2 \to H_2$ como $\mathcal{E}\overline{\xi} \equiv \overline{DC^{-1}\xi}$ para todo $\xi \in H_2$ (e portanto $\overline{\xi} \in \overline{H}_2$). A partir da equação (5.23), pode-se mostrar que [1]

$$\Psi_0 \equiv U|0\rangle = c \left(1, 0, \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, 0, ..., 0, \frac{\sqrt{n!}}{2^{\frac{n}{2}}(\frac{n}{2})!} \underbrace{\epsilon \otimes_s ... \otimes_s \epsilon}_{n \ vezes}, 0, ... \right), \tag{5.24}$$

onde $\epsilon \equiv \sum_{i,j} \mathcal{E}^{ij} u_i \otimes_s u_j$, $\mathcal{E}^{ij} \equiv (u_i, \mathcal{E}\overline{u}_j)_{KG}$ e $\mathcal{E}^{ij} = \mathcal{E}^{ji}$. A equação (5.24) determina a ação do operador U no estado de vácuo $|0\rangle$ e isso será suficiente para nossos propósitos. Para ver a ação de U em qualquer vetor de $\mathfrak{F}_s(H_1)$ bem como a prova que tal U é de fato unitário ver [1]. A transformação unitária U com os operadores A, B, C e D é chamada uma *transformação de Bogoliubov*.

5.1.3 Quantização em Espaços-Tempos Estáticos

Vimos que para quantizar o campo de Klein-Gordon em um espaço-tempo globalmente hiperbólico (M, g_{ab}), devemos tomar um sub-espaço H de soluções da equação (5.1) que obedeça as condições **(i)**, **(ii)** e **(iii)** da Seção 5.1.1. Entretanto, como já comentamos, existem infinitos H's que satisfazem tais propriedades e, em geral, não há como privilegiar nenhum deles. Entretanto, quando há simetria de translação temporal no espaço-tempo (espaço-tempo estacionário [2, 3]) temos uma escolha natural para H. Para nossos propósitos, será suficiente considerar espaços-tempos estáticos. Um espaço-tempo (M, g_{ab}) é dito estático se existe um sistema de coordenadas tal que o elemento de linha associado com g_{ab} pode ser posto na forma‡:

$$ds^2_{g_{ab}} = -f(\mathbf{x})dt^2 + \sum_{i,j} h_{ij}(\mathbf{x})dx^i dx^j, \tag{5.25}$$

onde $f(\mathbf{x}) > 0$ e $\mathbf{x}$ são coordenadas na superfície de Cauchy $\Sigma_{t=cte}$. O campo vetorial $\chi \equiv \partial/\partial t$ é dito um campo de Killing [2, 3] tipo tempo. Suas curvas integrais (ou seja, as curvas que em cada ponto tem χ como tangente), que nesse sistema de coordenadas são dadas por $\phi_t(t_1, \mathbf{x}_1) = (t_1 + t, \mathbf{x}_1)$, podem (por serem tipo tempo) ser associadas com as linhas de mundo de uma congruência de observadores $\mathcal{O}$. Vemos que para tais observadores, o espaço-tempo não muda ao aplicarmos a translação temporal definida por ϕ_t (por isso, ϕ_t também é chamada de uma isometria temporal). Em um sistema de coordenadas arbitrário, a equação (5.1) pode ser posta na forma [2, 3]

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} \right) - m^2 \phi = 0, \tag{5.26}$$

‡Em termos abstratos (sem utilizar coordenadas), um espaço-tempo é estacionário se existe um campo de Killing tipo tempo ξ, i.e., $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0$ e $g_{ab}\xi^a\xi^b < 0$, onde $\mathcal{L}_\xi$ indica a derivada de Lie. Um espaço-tempo é dito estático se ele é estacionário e admite uma hiperfície ortogonal a ξ. Em termos das coordenadas definidas na equação (5.25), $\mathcal{L}_\xi g_{ab} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = 0$.

onde $g = \det g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ é a inversa de $g_{\mu\nu}$ e $\mu, \nu \in \{0, ..., 3\}$. Especializando nas coordenadas estáticas, equação (5.25), a equação (5.26) é escrita como

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mathcal{K}\right)\phi = 0, \tag{5.27}$$

onde

$$\mathcal{K}\phi \equiv f\left[-\frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}h^{ij}\frac{\partial\phi}{\partial x^j}\phi\right) + m^2\phi\right], \tag{5.28}$$

com $i, j \in \{1, 2, 3\}$, é um operador hermitiano em $L^2\left(\Sigma_t, \sqrt{-g}f^{-1}d\mathbf{x}\right)$. Vemos que $\mathcal{K}$ não depende de t. Em geral, $\mathcal{K}$ será uma função de um conjunto completo J de operadores que comutam. Por exemplo, no caso do espaço-tempo de Minkowski com coordenadas cartesianas, $\mathcal{K} = \sum_j p_j^2 + m^2$, onde $p_j \equiv -i\partial/\partial x^j$. Seja $\mathcal{J}$ o espectro conjunto dos elementos de J (ou seja, o conjunto de todos os números quânticos), μ uma medida em $\mathcal{J}$ e ψ_j, $j \in \mathcal{J}$, auto-funções de $\mathcal{K}$ com auto-valores $\omega_j^2 \geq 0$, i.e.,

$$\mathcal{K}\psi_j = \omega_j^2\psi_j,$$

e que satisfaçam

$$\int_{\Sigma_t} d\mathbf{x}\sqrt{-g}f^{-1}\overline{\psi}_j(\mathbf{x})\psi_{j'}(\mathbf{x}) = \delta_\mu(j, j'),$$

onde $\int d\mu(j)\tilde{\phi}(j)\delta_\mu(j, j') = \tilde{\phi}(j')$, e $\overline{\psi}_j = \psi_k$ para algum $k \in \mathcal{J}$. Definimos então o espaço de Hilbert

$L^2(\mathcal{J}, d\mu(j))$

$$H_\chi \equiv \left\{\varphi(x) = \int \frac{d\mu(j)}{\sqrt{2\omega_j}}\tilde{\varphi}(j)e^{-i\omega_j t}\psi_j(\mathbf{x})\,\middle|\,\tilde{\varphi} \in \text{[illegible]}\right\} \tag{5.29}$$

de soluções da equação de Klein-Gordon. É fácil ver que H_χ satisfaz as condições **(i)**, **(ii)** e **(iii)** descritas na Seção 5.1.1. Tendo H_χ, basta seguirmos o processo de quantização descrito na Seção 5.1.1. Fazendo a transformada de Fourier

$$\hat{\varphi}(\sigma, \mathbf{x}) \equiv \int dt\, e^{i\sigma t}\varphi(t, \mathbf{x})$$

dos elementos de $\varphi(t, \mathbf{x})$ de H_χ, vemos que $\hat{\varphi}(\sigma < 0, \mathbf{x}) = 0$. Por essa razão, os elementos de H_χ são chamados soluções de frequência positiva com relação a t (ou equivalentemente, com relação ao campo de Killing $\chi = \partial/\partial t$).

A teoria quântica de campos construída a partir de H_χ tem uma interpretação natural em termos de estados de partículas. Por exemplo, interpretamos o estado $\frac{1}{\sqrt{n!}}\left[a^\dagger(\sigma)\right]^n|0\rangle$ como sendo o estado de n partículas no modo $\sigma \in H_\chi$. Entretanto, enfatizamos que para espaços-tempos não estacionários, qualquer interpretação em termos de partículas é extremamente problemática [1, 120].

DETETORES DE PARTÍCULAS

SEJA (M, g_{ab}) UM ESPAÇO-TEMPO ESTÁTICO COM CAMPO DE KILLING TIPO-TEMPO ξ.

VAMOS TOMAR ENTÃO $S^{\mathbb{C}} = H_\xi \oplus \overline{H}_\xi$, COM H_ξ SENDO O ESPAÇO H CONSTRUÍDO USANDO A SIMETRIA DE TRANSLAÇÃO DEFINIDA POR ξ (COMO MOSTRADO ANTERIORMENTE). ASSIM H_ξ É O ESPAÇO DE SOLUÇÕES DE FREQUÊNCIA POSITIVA COM RELAÇÃO À TRANSLAÇÃO TEMPORAL A^ξ_t, DEFINIDA POR ξ.

$$H_\xi = \left\{ \varphi(x) = \int \frac{d\mu(j)}{\sqrt{2\omega_j}} \tilde{\varphi}(j) e^{-i\omega_j t} \chi_j(\vec{x}) \,\Big|\, \tilde{\varphi} \in L^2(\Lambda, d\mu(j)) \right\}$$

VAMOS ENTÃO TOMAR $\mathcal{F}_s(H_\xi)$ COMO ESPAÇO DE ESTADOS DO CAMPO E SEGUIR COM A QUANTIZAÇÃO DE ϕ DA MANEIRA USUAL, COM VÁCUO DENOTADO POR $|0_\xi\rangle \in \mathcal{F}_s(H_\xi)$, $a(\overline{J})|0_\xi\rangle = 0$ $\forall J \in H_\xi$.

USAREMOS COMO DETETOR UM SISTEMA DE DOIS NÍVEIS COM HAMILTONIANA PRÓPRIA

$$H_D \equiv \Omega D^\dagger D \qquad (D1)$$

ONDE $H_D = \mathbb{C}^2$ (ESPAÇO DE HILBERT DE ESTADOS), $D|0\rangle = D^\dagger|1\rangle = 0$, $D|1\rangle = |0\rangle$, $D^\dagger|0\rangle = |1\rangle$ E $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ SÃO OS AUTO-ESTADOS DE ENERGIA DO DETETOR:

$$H_D|0\rangle = 0;\ H_D|1\rangle = \Omega|1\rangle,$$
$$\langle 0|1\rangle = 0,\ \langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1. \qquad (D2)$$

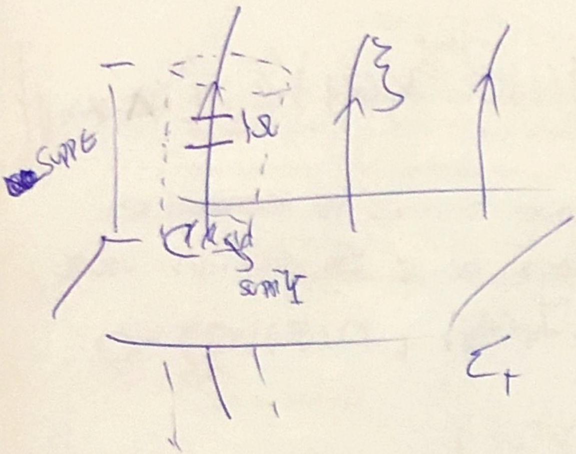
VAMOS TOMAR A HAMILTONIANA DE INTERAÇÃO DO DETETOR COM O CAMPO ϕ POR:

$$H_{int}(t) = \epsilon(t) \int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{-g}\, \phi(x) \left[\Psi(\vec{x}) D + \overline{\Psi}(\vec{x}) D^\dagger \right] \qquad (D3)$$

ONDE $\epsilon(t)$ É A CONSTANTE DE ACOPLAMENTO (QUE DEPENDE

DO TEMPO MODELANDO QUE "LIGAMOS E DESLIGAMOS" A INTERAÇÃO EM UM TEMPO FINITO), $\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ E $\Psi \in C_0^\infty(\Sigma)$ MODELA QUE O DETETOR INTERAGE COM O CAMPO EM UMA VIZINHANÇA DE SUA LINHA DE MUNDO. VAMOS TOMAR O DETETOR SE MOVENDO AO LONGO DAS CURVAS INTEGRAIS DE ξ (i.e, ELES SEGUEM A SIMETRIA DE TRANSLAÇÃO TEMPORAL)

A HAMILTONIANA TOTAL DO SISTEMA É



$$\begin{cases} H_{D\phi} \equiv H_0 + H_{int} \\ H_0 = H_D + \underbrace{H_{K.G}}_{\text{HAMILTONIANA LIVRE DO CAMPO.}} \end{cases}$$

$(\mathrm{supp}\,\epsilon \equiv (-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}))$

ASSIM, NA REPRESENTAÇÃO DE INTERAÇÃO

$$|\psi_t^{D\phi}\rangle = T\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{t} dt'\, H^I_{int}(t')\right\}|\psi_{-\infty}^{D\phi}\rangle$$

COM

$$H^I_{int}(t) = U_0^\dagger H_{int}(t) U_0 = \epsilon(t)\int_{\Sigma_t} d^3x\sqrt{-g}\,\phi(t,x)\left[e^{-i\Omega t}\Psi(x)D + h.c.\right]$$

DEFININDO $f \equiv \epsilon(t)\Psi(x)e^{-i\Omega t}$ TEMOS

$$H^I_{int}(t) = \int_{\Sigma_t}\sqrt{-g}\,d^3x\,\phi(x)\left[f(t,x)D + \bar{f}(t,x)D^\dagger\right]$$

$$\langle v_\alpha, Ef \rangle_{KG} = i \int_M \sqrt{-g}\, d^4x\, f\, \bar{v}_\alpha$$

$$\langle \bar{v}_\alpha, Ef \rangle_{KG} = i \int_M \sqrt{-g}\, d^4x\, f\, v_\alpha$$

SUPONDO $\epsilon(t) \simeq cte \equiv \epsilon$ QUANDO O DETETOR ESTÁ LIGADO, TEMOS

$$\langle \bar{v}_\alpha, Ef \rangle_{KG} = i \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \epsilon(t)\, e^{+i(\omega_\alpha + \Omega)t} \underbrace{\int_{\Sigma_t} d^3x \sqrt{-g}\, \psi(x)\, \frac{\psi_\alpha^*(x)}{\sqrt{2\omega_\alpha}}}_{\Gamma_\alpha}$$

ASSIM

$$\langle \bar{v}_\alpha, Ef \rangle_{KG} = \epsilon \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} dt\, e^{-i(\omega_\alpha + \Omega)t}\, \Gamma_\alpha = 2i\epsilon\Gamma_\alpha \frac{\operatorname{sen}[(\omega_\alpha+\Omega)\frac{\Delta}{2}]}{\omega_\alpha+\Omega}$$

AGORA, USANDO QUE $\dfrac{\operatorname{sen}[(\omega_\alpha+\Omega)\frac{\Delta}{2}]}{\omega_\alpha+\Omega} \simeq \pi\delta(\omega_\alpha+\Omega)$

TEMOS

$$\langle \bar{v}_\alpha, Ef \rangle_{KG} \simeq 2i\epsilon\Gamma_\alpha \pi\delta(\omega_\alpha+\Omega) = 0.$$

LOGO, Ef É (APROXIMADAMENTE) DE FREQ. POSITIVA:

$$Ef \simeq \int d\mu(\alpha) \langle v_\alpha, Ef \rangle v_\alpha = KEf \equiv \lambda$$

~~[illegible]~~

~~[illegible]~~

ANALOGAMENTE, MOSTRA-SE QUE $K\bar{E}\bar{f} \simeq 0$ ($\bar{E}\bar{f}$ É DE FREQ. NEGATIVA).

Logo:

$$|\psi_{\infty}^{D\phi}\rangle = T\exp\left\{-i\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}dt'\int_{\Sigma_{t'}}d^3x\sqrt{-g}\,\phi(t',x)\left[D\,f(t',x)+D^{\dagger}\bar{f}(t',x)\right]}_{\int_M\sqrt{-g}\,d^4x\,\phi(x)[f(x)D+\bar{f}(x)D^{\dagger}]}\right\}\times|\psi_{-\infty}^{D\phi}\rangle$$

Portanto:

$$\boxed{|\psi_{\infty}^{D\phi}\rangle = T\exp\left\{-i\,\phi(f)D - i\,\phi(\bar{f})D^{\dagger}\right\}|\psi_{-\infty}^{D\phi}\rangle \qquad (D4)}$$

Em primeira ordem de teoria de perturbação, a Eq. (D4) fica:

$$|\psi_{\infty}^{D\phi}\rangle = \left[I - i\left(\phi(f)D + \overset{\overset{\phi^{\dagger}(f)}{\parallel}}{\phi(\bar{f})}D^{\dagger}\right)\right]|\psi_{-\infty}^{D\phi}\rangle \quad (D5)$$

Lembrando que

$$\phi(f) = i\left[a(\overline{KEf}) - a^{\dagger}(KEf)\right]$$

E supondo que ligamos e desligamos a interação de maneira "lenta" (i.e., E varia lentamente quando comparada com Ω e $\Delta >> \Omega^{-1}$), temos que

$$Ef = \int d\mu(\alpha)\left[\langle u_{\alpha}, Ef\rangle_{KG}\, u_{\alpha} - \langle \bar{u}_{\alpha}, Ef\rangle_{KG}\,\bar{u}_{\alpha}\right]$$

com $u_{\alpha} = \frac{e^{-i\omega_{\alpha}t}}{\sqrt{2\omega_{\alpha}}}\psi_{\alpha}(x)$ base ort. de $\mathcal{H}_{\xi}$

(i.e. $\langle u_{\alpha}, u_{\beta}\rangle_{KG} = \delta_{\mu}(\alpha,\beta)$)

E

COM ISSO TEMOS:

$$\phi(t) = i a(\kappa\epsilon f) = i a^\dagger(\kappa\epsilon f) \simeq i a^\dagger(\underbrace{-\kappa\epsilon f}_{\lambda})$$

OU SEJA, A EQ. (DS) FICA

$$|\psi_{\infty}^{D\phi}\rangle = \left[I + i a^\dagger(\lambda) D - i a(\bar{\lambda}) D^\dagger \right] |\psi_{-\infty}^{D\phi}\rangle$$

VAMOS TOMAR

$$|\psi_{-\infty}^{D\phi}\rangle = |O_\xi\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

ASSIM

$$|\psi_{\infty}^{D\phi}\rangle = |\psi_{-\infty}^{D\phi}\rangle + \beta i a^\dagger(\lambda)|O_\xi\rangle \otimes D|1\rangle - \alpha\, a(\bar{\lambda})|O_\xi\rangle \otimes D^\dagger|0\rangle$$

LOGO

$$|\psi_{\infty}^{D\phi}\rangle = |O_\xi\rangle \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) + i\|\lambda\|\beta\,|1\hat{\lambda}\rangle_\phi \otimes |0\rangle \quad ; \text{ ONDE } \hat{\lambda} \equiv \frac{\lambda}{\|\lambda\|}$$

SE $\alpha=0,\ \beta=1$ i.e. $|\varphi_D\rangle = |1\rangle$

$$|\psi_{\infty}^{D\phi}\rangle = |O_\xi\rangle \otimes |1\rangle + i\|\lambda\|\beta\,|1\hat{\lambda}\rangle_\phi \otimes |0\rangle$$

$$P_{1\to 0} = \|\lambda\|^2 = \langle \psi_{\infty}^{D\phi} | I_\phi \otimes |0\rangle\langle 0| \psi_{\infty}^{D\phi}\rangle$$

LOGO $\boxed{P_{1\to 0}^{|O_\xi\rangle} = \|\kappa\epsilon f\|^2}$ DETETOR DESEXCITA EMITINDO UMA PARTÍCULA NO MODO $\hat{\lambda} = -\frac{\kappa\epsilon f}{\|\kappa\epsilon f\|}$

ANALOGAMENTE SE $\alpha=0$;

$$|\psi_{\infty}^{D\phi}\rangle = |O_\xi\rangle \otimes |0\rangle \; : \quad \text{DETETOR SE MANTÉM NO } \underline{\text{GROUND-STATE}}$$

$$P_{0\to 1}^{|O_\xi\rangle} = 0.$$

SE $|\psi_{-\infty}^{D\phi}\rangle = |\mathbb{1}_x\rangle_\phi \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$

ENTÃO

$$|\psi_{+\infty}^{D\phi}\rangle = |\mathbb{1}_x\rangle_\phi \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \quad ; \begin{cases} x \in \mathcal{H}_\xi \\ \langle x|x\rangle = 1. \end{cases} \; ; \; a^\dagger(x)|0\rangle = |\mathbb{1}_x\rangle$$

$$+\|\lambda\|(a^\dagger(\hat{\lambda})D - a(\bar{\hat{\lambda}})D^\dagger)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |\mathbb{1}_x\rangle_\phi$$

Assim

$$|\psi_{+\infty}^{D\phi}\rangle = |\mathbb{1}_x\rangle_\phi \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

$$+\|\lambda\|\beta|\mathbb{1}_x, \mathbb{1}_{\hat{\lambda}}\rangle_\phi \otimes |0\rangle$$

$$-\|\lambda\|\alpha\langle\bar{\hat{\lambda}}|x\rangle_{KG}|0_\xi\rangle \otimes |1\rangle$$

OU SEJA

$$|\psi_{+\infty}^{D\phi}\rangle = |\mathbb{1}_x\rangle_\phi \otimes (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)$$

$$-\alpha\langle\lambda|x\rangle_{KG}|0_\xi\rangle_\phi \otimes |1\rangle \quad ; \lambda = -KEf$$

SE $\beta = 0$ $\quad +\|\lambda\|\beta|\mathbb{1}_x, \mathbb{1}_{\hat{\lambda}}\rangle_\phi \otimes |0\rangle$

$|\varphi\rangle_D = |0\rangle$ E

$$|\psi_{+\infty}^{D\phi}\rangle = |\mathbb{1}_x\rangle_\phi \otimes |0\rangle + \langle KEf|x\rangle_{KG}|0_\xi\rangle \otimes |1\rangle$$

$$P_{0\to 1}^{|\mathbb{1}_x\rangle} = |\langle KEf|x\rangle_{KG}|^2 = |\langle Ef, x\rangle_{KG}|^2 = \left|\int_M \sqrt{g}\,d^4x\,\bar{x}(x) f(x)\right|^2$$

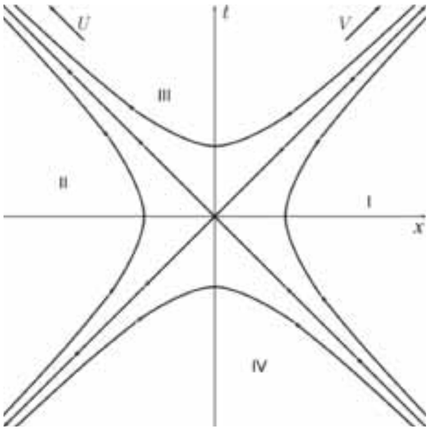


Figura 5.1: Diagrama espaço-temporal do espaço-tempo de Minkowski com as regiões $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ e IV dadas por $|t| < x$, $|t| < -x, t > |x|$ e $t < -|x|$, respectivamente. As curvas com as setas são as curvas integrais do campo de Killing $a\,[x\partial/\partial t + t\partial/\partial x]$.

5.1.4 O Efeito Unruh

Vamos aplicar a construção da seção anterior no espaço-tempo de Minkowski com relação a dois conjuntos diferentes de observadores, os inerciais e os uniformemente acelerados, e comparar a descrição que ambos dão ao vácuo de Minkowski (vácuo com relação aos observadores inerciais).

Tomemos primeiro um sistema de coordenadas cartesianas globais t, x, y, z em $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$. Nessas coordenadas, o elemento de linha associado a η_{ab} toma a forma

$$ds^2_{\eta_{ab}} = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{5.30}$$

Vemos então que $(\mathbb{R}^4, \eta_{ab})$ é estático com campo de Killing $\chi_1 = \partial/\partial t$, que gera a translação temporal $\phi_t^{\chi_1}(t_1, \mathbf{x}_1) = (t_1 + t, \mathbf{x}_1)$, onde $\mathbf{x}_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$, e portanto está associado com observadores inerciais. Nessas coordenadas, $\mathcal{K} = \sum_j p_j^2 + m^2$, onde $p_j \equiv -i\partial/\partial x^j$. Sendo assim, $\mathcal{J} = \mathbb{R}^3$ (e portanto $j = \mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$), $\omega_j = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ e tomamos $d\mu(j) \equiv d\mathbf{k}$ e $\psi_j \equiv (2\pi)^{-3/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$. Portanto, usando a equação (5.29), vemos que $H_{\chi_1} = H_{KG}$, onde H_{KG} é dado na equação (5.5), e com isso recuperamos a construção da teoria quântica de campos usual no espaço-tempo de Minkowski descrita no começo da Seção 5.1.1. O estado de vácuo dessa construção, i.e., o vetor $|0_M\rangle \in \mathfrak{F}_s(H_{\chi_1})$ que satisfaz $a(\overline{\sigma})|0_M\rangle$ para todo $\sigma \in H_{\chi_1}$, é chamado *vácuo de Minkowski.*

Entretanto, podemos realizar outra construção para a teoria quântica de campos. Tome a região I da Figura 5.1, ou seja, a região caracterizada por $|t| < x$. Podemos cobrir essa região com as coordenadas τ, ξ, y, z onde τ e ξ são dados por

$$t = a^{-1} e^{a\xi} \sinh a\tau, \tag{5.31}$$

$$x = a^{-1} e^{a\xi} \cosh a\tau, \tag{5.32}$$

onde a é uma constante positiva. O elemento de linha de η_{ab} nessas coordenadas toma a forma

$$ds^2_{\eta_{ab}} = e^{2a\xi}(-d\tau^2 + d\xi^2) + dy^2 + dz^2. \tag{5.33}$$

Vemos então que a região I, que é globalmente hiperbólica e portanto define um espaço-tempo, é estática com campo de Killing dado por $\chi_2 = \partial/\partial\tau$ (que em coordenadas cartesianas pode ser escrito como $\chi_2 = a\,[x\partial/\partial t + t\partial/\partial x]$). O campo de Killing χ_2 gera a translação temporal $\phi^{\chi_2}_\tau(\tau_1, \xi_1, \mathbf{x}_\perp) = (\tau_1 + \tau, \xi_1, \mathbf{x}_\perp)$, onde $\mathbf{x}_\perp = (y, z)$. Para cada $(\tau_1, \xi_1, \mathbf{x}_\perp)$, a curva $\phi^{\chi_2}_\tau(\tau_1, \xi_1, \mathbf{x}_\perp)$ corresponde a uma hipérbole que passa por $(\tau_1, \xi_1, \mathbf{x}_\perp)$, ver Figura 5.1. Tais hipérboles tem como tangente $\partial/\partial\tau$ em cada um de seus pontos (no sistema de coordenadas τ, ξ, y, z, $\partial/\partial\tau$ pode ser escrito como $(1, 0, 0, 0)$). Se definirmos $u^\mu \equiv e^{-a\xi}(1, 0, 0, 0)$, vemos que $u^\mu u_\mu = -1$ e portanto, u^μ corresponde à quadrivelocidade dos observadores que seguem as hipérboles. A aceleração própria de cada linha de mundo é dada por $\sqrt{a_\mu a^\mu} = ae^{-a\xi}$, onde $a^\mu \equiv u^a \nabla_a u^\mu$ é sua quadriaceleração. Com isso, vemos que os observadores associados a essa translação temporal estão uniformemente acelerados. Vemos também que para as hipérboles com $\xi = 0$ vale $\sqrt{a_\mu a^\mu} = a$ e o campo de Killing χ_2 satisfaz $\partial/\partial\tau = u$. Por isso, dizemos que a família de observadores descrita acima está naturalmente associada com observadores que aceleram uniformemente com aceleração própria a.

Nas coordenadas τ, ξ, y, z,

$$\mathcal{K} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + m^2 e^{2a\xi}\right] + e^{2a\xi}\sum_{j=2}^{3} p_j^2.$$

Suponha que ψ é uma auto-função de $\mathcal{K}$ com auto-valor ω^2, i.e., $\mathcal{K}\psi = \omega^2\psi$. Fazendo a separação de variáveis $\psi = (2\pi)^{-1} g(\xi) e^{i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{x}_\perp}$ vemos que g satisfaz

$$\left[-\frac{d^2}{d\xi^2} + e^{2a\xi}(\mathbf{k}_\perp^2 + m^2)\right] g(\xi) = \omega^2 g(\xi). \tag{5.34}$$

Os auto-valores ω tomam valores em $(0, \infty)$. Os parâmetros ω e $\mathbf{k}_\perp$ rotulam uma família ortonormal completa de auto-funções de $\mathcal{K}$ e com isso, tomamos $j \equiv (\omega, \mathbf{k}_\perp)$. As soluções da equação (5.34) (com as condições de contornos físicas adequadas [118]) são dadas por

$$g_{\omega\mathbf{k}_\perp}(\xi) = \left[\frac{2\omega\sinh(\pi\omega/a)}{\pi^2 a}\right] K_{i\omega/a}\left(\frac{\kappa}{a}e^{a\xi}\right), \tag{5.35}$$

onde $\kappa \equiv \sqrt{\mathbf{k}_\perp^2 + m^2}$ e $K_\nu(z)$ é a função de Bessel modificada [126]. Agora, usando a equação (5.29), definimos

$$H^I_{\chi_2} \equiv \left\{\varphi(x) = \int \frac{d\omega d\mathbf{k}_\perp}{\sqrt{2\omega}}\tilde{\varphi}(\omega, \mathbf{k}_\perp) e^{-i\omega\tau}\psi_{\omega\mathbf{k}_\perp}(\xi, \mathbf{x}_\perp)\middle|\tilde{\varphi} \in L^2\left((0,\infty)\times\mathbb{R}^2, d\omega d\mathbf{k}_\perp\right)\right\}, \tag{5.36}$$

onde vemos que $\mathcal{J} = (0, \infty) \times \mathbb{R}^2$,

$$\psi_{\omega\mathbf{k}_\perp}(\xi, \mathbf{x}_\perp) \equiv \left[\frac{\sinh(\pi\omega/a)}{4\pi^4 a}\right]^{1/2} K_{i\omega/a}(\kappa e^{a\xi}/a) e^{i\mathbf{k}_\perp\cdot\mathbf{x}_\perp},$$

e tomamos $d\mu(j) \equiv d\omega d\mathbf{k}_\perp$.

Podemos agora cobrir a região II da Figura 5.1 com as coordenadas $\hat{\tau}, \hat{\xi}, y, z$ onde

$$t = a^{-1}e^{a\hat{\xi}} \sinh a\hat{\tau}, \quad (5.37)$$

$$x = -a^{-1}e^{a\hat{\xi}} \cosh a\hat{\tau}. \quad (5.38)$$

Então, procedemos de maneira análoga a descrita acima, usando $\hat{\tau}$ e $\hat{\xi}$ no lugar de τ e ξ, obtemos o espaço de Hilbert $H^{II}_{\chi 2}$. Definindo $H_{\chi 2} \equiv H^{I}_{\chi 1} \oplus H^{II}_{\chi 2}$[§], e procedendo como descrito na Seção 5.1.1, obtemos uma segunda construção para o campo quântico ϕ em todo o espaço-tempo de Minkowski [1, 118].

Queremos agora achar o estado $\Psi_0 \equiv U|0_M\rangle \in \mathfrak{F}_s(H_{\chi 2}) \simeq \mathfrak{F}_s\left(H^{I}_{\chi 2}\right) \bigotimes \mathfrak{F}_s\left(H^{II}_{\chi 2}\right)$, correspondente ao vácuo de Minkowski na construção associada aos observadores uniformemente acelerados. Em particular, queremos calcular a restrição do vácuo de Minkowski à região I. Ela é obtida tomando o traço em $\mathfrak{F}_s\left(H^{II}_{\chi 2}\right)$ da matriz densidade correspondente ao vácuo de Minkowski.

Sejam ψ^I_ω, $\omega \in (0, \infty)$, soluções da equação de Klein-Gordon que oscilam harmonicamente com frequência ω com relação a τ na região I e se anulam na região II. As soluções ψ^{II}_ω são dadas por $\psi^{II}_\omega \equiv \overline{\psi^I_\omega \circ w}$, onde $w(t, x, y, z) = (-t, -x, y, z)$. Vemos então que ψ^{II}_ω oscila harmonicamente com frequência ω com relação à $\hat{\tau}$ na região II e se anula na região I. A observação principal que nos permite calcular Ψ_0 é que

$$\Phi_\omega \equiv \psi^I_\omega + e^{-\pi\omega/a}\overline{\psi}^{II}_\omega \quad (5.39)$$

e

$$\Phi'_\omega \equiv \psi^{II}_\omega + e^{-\pi\omega/a}\overline{\psi}^{I}_\omega \quad (5.40)$$

são de frequência positiva com relação a t [1, 117, 118]. As soluções ψ^I_ω e ψ^{II}_ω não são normalizáveis e portanto não pertencem a $H^I_{\chi 2}$ e $H^{II}_{\chi 2}$, respectivamente. Isso pode ser contornado tomando pacotes de onda $\psi^I_{\omega_i}$ e $\psi^{II}_{\omega_i}$ bem centrados em frequências $\omega_i > 0$ de tal forma que $\{\psi^I_{\omega_i} | i \in \mathbb{N}\}$ e $\{\psi^{II}_{\omega_i} | i \in \mathbb{N}\}$ sejam bases ortonormais de $H^I_{\chi 2}$ e $H^{II}_{\chi 2}$, respectivamente, e

$$\Phi_i \equiv \psi^I_{\omega_i} + e^{-\pi\omega_i/a}\overline{\psi}^{II}_{\omega_i} \quad (5.41)$$

e

$$\Phi'_i \equiv \psi^{II}_{\omega_i} + e^{-\pi\omega_i/a}\overline{\psi}^{I}_{\omega_i} \quad (5.42)$$

sejam de frequência positiva com relação a t. Então temos

$$C\Phi_i = \psi^I_{\omega_i} \quad , \quad C\Phi'_i = \psi^{II}_{\omega_i} \quad (5.43)$$

$$D\Phi_i = e^{-\pi\omega_i/a}\overline{\psi}^{II}_{\omega_i} \quad , \quad D\Phi'_i = e^{-\pi\omega_i/a}\overline{\psi}^{I}_{\omega_i} \quad (5.44)$$

[§]Aqui, os elementos de $H^I_{\chi 2}$ e $H^{II}_{\chi 2}$ estão naturalmente estendidos para o espaço-tempo de Minkowski inteiro [118]. Sendo assim, se $\psi = \psi^I + \psi^{II} \in H_{\chi 2}$, a restrição de ψ^I (ψ^{II}) à região I (II) é $\int \frac{d\omega d\mathbf{k}_\perp}{\sqrt{2\omega}} \tilde{\varphi}(\omega, \mathbf{k}_\perp) e^{-i\omega\tau} \psi_{\omega\mathbf{k}_\perp}(\xi, \mathbf{x}_\perp)$ $\left(\int \frac{d\omega d\mathbf{k}_\perp}{\sqrt{2\omega}} \tilde{\varphi}(\omega, \mathbf{k}_\perp) e^{-i\omega\hat{\tau}} \psi_{\omega\mathbf{k}_\perp}(\hat{\xi}, \mathbf{x}_\perp)\right)$ e à região II (I) é nula.

e portanto $\mathcal{E}\overline{\psi^I_{\omega_i}} = e^{-\pi\omega_i/a}\psi^{II}_{\omega_i}$ e $\mathcal{E}\overline{\psi^{II}_{\omega_i}} = e^{-\pi\omega_i/a}\psi^{I}_{\omega_i}$. Com isso,

$$\epsilon = \sum_i e^{-\pi\omega_i/a} 2\psi^I_{\omega_i} \otimes_s \psi^{II}_{\omega_i}. \tag{5.45}$$

Podemos agora colocar a equação (5.24) na forma

$$\begin{aligned} U|0_M\rangle &= c\Bigg[|0_R\rangle + \sum_i e^{-\pi\omega_i/a} a^\dagger_{RI}(\psi^I_{\omega_i}) a^\dagger_{RII}(\psi^{II}_{\omega_i})|0_R\rangle \\ &+ \ldots + \frac{1}{(\frac{n}{2})!}\left[\sum_i e^{-\pi\omega_i/a} a^\dagger_{RI}(\psi^I_{\omega_i}) a^\dagger_{RII}(\psi^{II}_{\omega_i})\right]^{n/2} |0_R\rangle + \ldots\Bigg] \\ &= c\sum_j \frac{1}{j!}\left[\sum_i e^{-\pi\omega_i/a} a^\dagger_{RI}(\psi^I_{\omega_i}) a^\dagger_{RII}(\psi^{II}_{\omega_i})\right]^{j} |0_R\rangle \\ &= c\exp\left[\sum_i e^{-\pi\omega_i/a} a^\dagger_{RI}(\psi^I_{\omega_i}) a^\dagger_{RII}(\psi^{II}_{\omega_i})\right] |0_R\rangle, \end{aligned} \tag{5.46}$$

onde na penúltima passagem fizemos a mudança de variáveis $n = 2j$, $j \in \mathbb{N}$. Aqui, usamos que

$$\frac{1}{\sqrt{n!}} a^\dagger_{RX}(f^X_1)\ldots a^\dagger_{RX}(f^X_n)|0_R\rangle = (0, \ldots, f^X_1 \otimes_s \ldots \otimes_s f^X_n, 0\ldots),$$

onde $a^\dagger_{RX}$ é o operador criação em $\mathfrak{F}_s\left(H^X_{\chi 2}\right)$, $X \in \{I, II\}$, $f^X_k \in H^X_{\chi 2}$ e $|0_R\rangle$ é o vácuo de Rindler, i.e., o vetor $|0_R\rangle \in \mathfrak{F}_s\left(H^I_{\chi 2}\right) \bigotimes \mathfrak{F}_s\left(H^{II}_{\chi 2}\right)$ que satisfaz $a_{RX}(\overline{f^X})|0_R\rangle = 0$ para todo $f^X \in H^X_{\chi 2}$, onde a_{RX} é o operador aniquilação em $\mathfrak{F}_s\left(H^X_{\chi 2}\right)$. Com isso, podemos escrever o vácuo de Minkowski em termos de modos de Rindler como

$$U|0_M\rangle = \prod_i \left(C_i \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-\pi n_i \omega_i/a} |n_{iI}\rangle \otimes |n_{iII}\rangle\right), \tag{5.47}$$

onde $c = \prod_i C_i$, $C_i \equiv \left(1 - e^{-2\pi\omega_i/a}\right)^{1/2}$ e $|n_{iX}\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{n_i!}}\left[a^\dagger_{RX}\left(\psi^X_i\right)\right]^{n_i} |0_R\rangle$.

Observadores uniformemente acelerados na região I não têm acesso à região II, já que elas são causalmente desconectadas. Para tais observadores, o vácuo de Minkowski é descrito pelo estado misto $\rho^I_M \equiv \mathrm{tr}_{II} U|0_M\rangle\langle 0_M|U^\dagger$, que descreve a restrição do vácuo de Minkowski à região I. Usando a equação (5.47) e tomando o traço em $\mathfrak{F}_s\left(H^{II}_{\chi 2}\right)$ obtemos

$$\rho^I_M = \prod_i \left(C_i^2 \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{-2\pi n_i \omega_i/a} |n_{iI}\rangle\langle n_{iI}|\right). \tag{5.48}$$

Ou seja, vemos que a restrição do vácuo de Minkowski à região I é um estado térmico com temperatura

$$T = a/2\pi. \tag{5.49}$$

Esse é o chamado *efeito Unruh*. Interpretamos esse resultado dizendo que um observador uniformemente acelerado "se sente" imerso em um banho térmico com temperatura (5.49) quando o campo está no vácuo de Minkowski (ausência de partículas como definidas pelos observadores inerciais). O efeito Unruh mostra como o conceito de partícula (quando existe) depende de observador. Entretanto, convém notar que observáveis físicos independem de qual interpretação de partícula (a dos inerciais ou dos acelerados) se dá ao campo já que a teoria é de um campo quântico e seus observáveis dependem somente dessa estrutura de campo. A independência dos observáveis físicos com relação aos observadores pode ser usada para mostrar que o efeito Unruh é necessário para manter a própria consistência da teoria quântica de campos. Um exemplo emblemático disso é a desintegração de prótons uniformemente acelerados [127]. Para mais aplicações do efeito Unruh, indicamos a revisão [118] e suas referências. Uma formulação matematicamente rigorosa (que vale inclusive para teorias com interação que obedecem aos axiomas de Wightman) do efeito Unruh é que a restrição do vácuo de Minkowski à sub-álgebra $\mathcal{A}_I$ associada a região $x > |t|$ é um estado térmico (i.e. KMS) com relação a translação temporal definida pelos observadores uniformemente acelerados [1, 128]. Tal resultado é uma consequência do chamado Teorema de Bisognano-Wichmann [129] publicado, assim como o trabalho de W. Unruh [117], em 1976. Entretanto, o fato que tal teorema leva a uma demonstração rigorosa do efeito Unruh só foi notado em 1982 por Sewell [128].

5.2 Morte Súbita do Emaranhamento e Perda de Fidelidade no Teletransporte via o Efeito Unruh

Nessa seção, vamos usar o efeito Unruh para investigar como o teletransporte de estados quânticos é afetado quando um dos qubits do par emaranhado está sob influência de alguma força externa [20]. Para obtermos um entendimento mais abrangente, faremos uma análise detalhada de como a aceleração afeta o sistema de qubits emaranhado. Em particular, calcularemos a informação mútua quântica e a concurrence entre os dois qubits e mostraremos que a última apresenta uma morte súbita [130] em uma aceleração finita cujo valor vai depender do intervalo de tempo em que o detetor permanece acelerado.

O teletransporte de estados quânticos é sem dúvida um dos efeitos mais interessantes descobertos nas últimas décadas. Como vimos na Seção 3.4.2, o trabalho original de Bennett et al [13] considera o sistema como sendo isolado de forças externas e com isso, o estado maximamente emaranhado que descreve o par de qubits evolui unitariamente. Como um desenvolvimento natural, Alsing e Milburn analisaram o caso em que o sistema não está totalmente isolado [77]. Em sua configuração, Bob é substituído por um observador uniformemente acelerado que chamamos de Rob. Alice e Rob carregam, cada um, uma cavidade ótica em repouso no seus referenciais próprios que assumimos como estando livres de fótons de Minkowski. Cada cavidade suporta dois modos de Minkowski ortogonais A_i e R_i $(i = 1, 2)$ com mesma frequência, onde de agora em diante A e R serão usados para rotular Alice e Rob, respectivamente. No momento em que Alice e Rob se

OBS: $\varphi \in \mathcal{H}_m$ É DE FREQ. POSIT. COM RELAÇÃO À t SE E SÓ SE ELE É DE FREQ. POS. COM RELAÇÃO À U E V EM $h_A \cup h_B$

ONDE $U = t - x$, $V = t + x$

DE FATO,

$$\varphi = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k}} \tilde{\varphi}(\vec{k}) e^{-i\omega_k t} e^{i k_x x} e^{i \vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}, \quad \omega_k > 0$$

ENTÃO

$$\varphi = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k}} \tilde{\varphi}(\vec{k}) e^{-\frac{i\omega_k}{2}(U+V)} e^{\frac{i k_x}{2}(V-U)} e^{i \vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}$$

EM h_A, $U = 0$ E

$$\varphi = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_k}} \tilde{\varphi}(\vec{k}) e^{-i(\omega_k - k_x)V} e^{i \vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp}$$

COMO $\omega_k = \sqrt{k_x^2 + \vec{k}_\perp^2 + m^2} \geq k_x$

TEMOS QUE φ É DE F.P. COM RELAÇÃO À V E ANALOGAMENTE P/ U EM h_B

$$f^I_\omega = \Psi^I_\omega \Big|_{h_A} = \begin{cases} e^{-i\omega z} h(\vec{x}_\perp) & V > 0 \\ 0 & V < 0 \end{cases}$$

$$\xi = a(t\partial_x + x\partial_t) = a(-U\partial_U + V\partial_V)$$

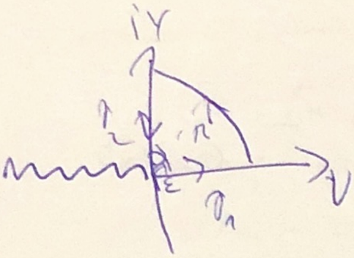
$$h_A = \xi(z) = aV\partial_V z = 1 \qquad z = a^{-1}\ln|V|$$

ASSIM

$$f^I_\omega = \begin{cases} e^{-\frac{i\omega}{a}\ln V} & V > 0 \\ 0 & V < 0 \end{cases}$$

$$\hat f_\omega(\sigma, x_+) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma v} f_\omega(v, x_+) = h\int_0^\infty \underbrace{e^{i\sigma v}\, e^{-\frac{i\omega}{2}\ln v}}_{r(v)}\, dv \equiv h(x_+)\, I(\sigma)$$

$$r(z) = e^{i\sigma z}\, e^{-\frac{i\omega}{2}\ln z}$$



$\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$

$\sigma > 0$

$$\int_{\gamma_2} r(z)\,dz = -\int_{\gamma_1} r(z)\,dz$$

$\gamma_1 : v \;,\; v > 0$

$\gamma_2 = iy \;,\; y > 0$

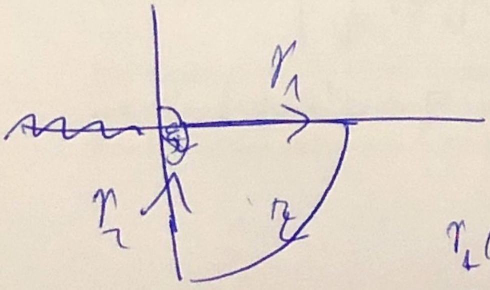
$$i\int_\infty^0 dy\, e^{-\sigma y}\, e^{-\frac{i\omega}{2}\underbrace{\ln(iy)}_{\ln y + i\frac{\pi}{2}}} = -\int_0^\infty r(v)\,dv = -I(\sigma)$$

$$I(\sigma) = i\int_0^\infty dy\, e^{-\sigma y}\, e^{\frac{\pi\omega}{4}}\, e^{-\frac{i\omega}{2}\ln y}$$

$$\boxed{I(\sigma) = e^{+\frac{\pi\omega}{4}}\, i\int_0^\infty dy\, e^{-\sigma y}\, e^{-\frac{i\omega}{2}\ln y}} \quad (*)$$

$\rho(\sigma > 0)$

$$\hat f(-\sigma, x_+) = h(x_+)\, I(-\sigma) = h(x_+)\int_0^\infty \underbrace{e^{-i\sigma v}\, e^{-\frac{i\omega}{2}\ln v}}_{r(z)}\, dv$$



$\varepsilon \to 0$, $R \to \infty$

$$\int_{\gamma_2} r(z)\,dz = -\int_{\gamma_1} r(z)\,dz$$

$$r(z) = e^{-i\sigma z}\, e^{-\frac{i\omega}{2}\ln z}$$

$\gamma_1(v) = v;\; v > 0$

$\gamma_2(y) = -iy \;,\; y > 0$

$$I(-\sigma) = \int_{\gamma_1} F(v)\,dv = +i\int_{+\infty}^{0} dy\, e^{-\sigma y}\, e^{-\frac{i\omega}{a} e^{a(-iy)}}$$

$$= -e^{-\frac{\pi\omega}{2a}}\, \underbrace{i\int_{0}^{\infty} dy\, e^{-\sigma y}\, e^{-\frac{i\omega}{a} e^{-y}}}_{\text{Usando } (*) \;=\; e^{-\frac{\pi\omega}{2a}} I(\sigma)}$$

Logo

$$\boxed{I(-\sigma) = -e^{-\frac{\pi\omega}{a}} I(\sigma)} \qquad (**)$$

$$\bar{\psi}_{II} = \psi_{I\omega} \quad (v \to -v)$$

Logo $\bar{f}^{II}_{\omega} = \bar{\psi}^{II}_{\omega}\Big|_{H} = \begin{cases} 0 & v > 0 \\ e^{-\frac{i\omega}{a} e^{a(-v)}}\, h(x^+), & v < 0 \end{cases}$

$$\hat{f}^{II}_{\omega}(\sigma, x^+) = \int_{-\infty}^{0} e^{i\sigma v} e^{-\frac{i\omega}{a} e^{a(-v)}}\, dv \underset{v \to -v}{=} +\int_{0}^{\infty} e^{-i\sigma v} e^{-\frac{i\omega}{a} e^{av}} \ldots = \hat{f}^{I}_{\omega}(-\sigma, x^+)$$

Logo $\boxed{\hat{f}^{II}_{\omega}(\sigma, x^+) = \hat{f}^{I}_{\omega}(-\sigma, x^+)}$ $\quad (***)$

TENDO ESSES RESULTADOS, DEFINA

$$\begin{cases} \Phi_{\omega} = \psi^{I}_{\omega} + e^{-\frac{\pi\omega}{a}}\, \bar{\psi}^{II}_{\omega} \\[2ex] \Phi'_{\omega} = \psi^{II}_{\omega} + e^{-\frac{\pi\omega}{a}}\, \bar{\psi}^{I}_{\omega} \end{cases}$$

Em h_A (anál. p/ h_B)

$$\begin{cases} \Phi_\omega\big|_{h_A} = F_\omega = f_\omega^{I} + e^{-\frac{\pi\omega}{a}} \overline{f_\omega^{II}} \\[2em] \Phi'_\omega\big|_{h_A} = F'_\omega = f_\omega^{II} + e^{-\frac{\pi\omega}{a}} \overline{f_\omega^{I}} \end{cases}$$

Assim

$$\hat{\Phi}\big|_{h_A}(-\sigma) = \hat{F}_\omega(\sigma, x_\perp) = \hat{f}_\omega^{I}(-\sigma, x_\perp) + e^{-\frac{\pi\omega}{a}} \hat{f}_\omega^{II}(-\sigma, x_\perp)$$

$$\overset{(\text{eq.})}{=} h(x_\perp) I(\sigma) + e^{-\frac{\pi\omega}{a}} \hat{f}^{I}(\sigma, x_\perp)$$

$$\underset{(\text{eq.})}{=} h(x_\perp) I(-\sigma) + e^{-\frac{\pi\omega}{a}} I(\sigma) h(x_\perp)$$

$$= h(x_\perp)\left(-e^{-\frac{\pi\omega}{a}} I(\sigma) + e^{-\frac{\pi\omega}{a}} I(\sigma)\right) = 0$$

Logo $\Phi_\omega \in \mathcal{H}_M$

Analogamente $\Phi'_\omega \in \mathcal{H}_M$

P/ termos soluções normalizáveis, construímos pacotes de onda centrados em ω_j, $j \in \mathbb{N}$. Assim temos

$$\Phi_j = u_{\omega_j}^{I} + e^{-\frac{\pi\omega}{a}} \overline{u_{\omega_j}^{II}}$$

$$\Phi'_j = u_{\omega_j}^{II} + e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}} \overline{u_{\omega_j}^{I}}$$

de tal forma que

; $\{u_j^{I}\}$ B.O de $\mathcal{H}_R^{I}$

$\{u_j^{II}\}$ B.O de $\mathcal{H}_R^{II}$

Assim $\{\Phi_j, \Phi'_j\}$: B.O de $\mathcal{H}_M$

Logo:

$$C\Phi_j = u_{\omega_j}^{I} \;;\; D\Phi_j = e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}} \overline{u_{\omega_j}^{II}}$$

$$C\Phi'_j = u_{\omega_j}^{II} \;;\; D\Phi'_j = e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}} \overline{u_{\omega_j}^{I}}$$

Assim

$$\mathcal{E}\,\overline{\varphi^{I}_{\omega_j}} = \overline{D c^{-1}\varphi^{I}_{\omega_j}} = e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}}\varphi^{II}_{\omega_j}$$

$$\mathcal{E}\,\overline{\varphi^{II}_{\omega_j}} = \overline{D c^{-1}\varphi^{II}_{\omega_j}} = e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}}\varphi^{I}_{\omega_j}$$

Como $\epsilon = \sum_{\substack{\sigma\sigma' = I, II \\ j, j'}} \mathcal{E}^{\sigma\sigma'}_{jj'}\, \lambda^{\sigma}_{j} \otimes_s \lambda^{\sigma'}_{j'}$

E $\mathcal{E}^{\sigma\sigma'}_{jj'} = \langle \lambda^{\sigma}_{j}, \mathcal{E}\bar{\lambda}^{\sigma'}_{j'} \rangle = \begin{cases} 0 & \sigma = \sigma' \\ \delta_{jj'} e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}} & \sigma \neq \sigma' \end{cases}$

Assim

$$\boxed{\epsilon = \sum_j e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}}\, 2\,\varphi^{I}_{\omega_j} \otimes_s \varphi^{II}_{\omega_j}}$$

Usando a transf. de Bogoliubov

$$\psi_0^M \equiv U|0_M\rangle = c(1,0,\dots) + c\underbrace{\sum_j e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}}}_{\frac{1}{2}\epsilon}(0,\dots,0,\sqrt{2}\,\varphi^{I}_{\omega_j}\otimes_s\varphi^{II}_{\omega_j},0,\dots$$

$$+\dots + c\Big(0,\dots,0,\; 2^{\frac{m}{2}}\frac{\sqrt{m!}}{2^{\frac{m}{2}}(\frac{m}{2})!}\underbrace{\Big(\sum_j e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}}\varphi^{I}_{\omega_j}\otimes_s\varphi^{II}_{\omega_j}\Big)\otimes_s\dots\otimes_s\Big(\sum_j e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}}\varphi^{I}_{\omega_j}\otimes_s\varphi^{II}_{\omega_j}\Big)}_{\frac{m}{2}\text{ vezes}}, 0, \dots\Big)$$

Note que

$$\sum_j e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}} a^{\dagger}_{R}(\varphi^{I}_{\omega_j})\, a^{\dagger}_{R}(\varphi^{II}_{\omega_j})(1,0,\dots) = \sum_j a^{\dagger}(\varphi^{I}_{\omega_j})(0, e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}}\varphi^{II}_{\omega_j}, 0, \dots)$$

$$= (0,0,\sqrt{2}\sum_j e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}}\varphi^{I}_{\omega_j}\otimes_s\varphi^{II}_{\omega_j}, 0, \dots)$$

E

$$\frac{1}{(\frac{m}{2})!}\Big(\sum_j e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}} a^{\dagger}_{R}(\varphi^{I}_{\omega_j})\, a^{\dagger}_{R}(\varphi^{II}_{\omega_j})\Big)^{\frac{m}{2}}\underset{(1,0,0,\dots)}{\underbrace{|0_R\rangle}} = (0,\dots,0,\frac{\sqrt{m!}}{2^{\frac{m}{2}}(\frac{m}{2})!}\overbrace{\epsilon\otimes_s\dots\otimes\epsilon}^{\frac{m}{2}}, 0, \dots)$$

LOGO

$$\psi_0^M = U|0_M\rangle = c\,(|0_R\rangle + \sum_j e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}} a_R^{+}(\nu_{\omega_j}^{I})\,a^{+}(\nu_{\omega_j}^{II})\,|0_R\rangle + \dots$$

$$+ \frac{1}{\left(\frac{m}{2}\right)!}\left(\sum_j e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}} a_R^{+}(\nu_{\omega_j}^{I})\,a_R^{+}(\nu_{\omega_j}^{II})\right)^{\frac{m}{2}}|0_R\rangle$$

$$+ \dots$$

ENTÃO, SE $M=2K$, TEMOS $c = \prod_j c_j$

$$\psi_0^M = U|0_M\rangle = c\underbrace{\sum_{K=0}^{\infty}\frac{1}{K!}\left(\sum_j e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}} a_R^{+}(\nu_{\omega_j}^{I})\,a_R^{+}(\nu_{\omega_j}^{II})\right)}_{\exp\left[\sum_j e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}} a_R^{+}(\nu_{\omega_j}^{I})\,a_R^{+}(\nu_{\omega_j}^{II})\right]}|0_R\rangle$$

ASSIM

$$\psi_0^M = \prod_j\left(c_j\, e^{-\frac{\pi\omega_j}{a} a_R^{+}(\nu_{\omega_j}^{I})\,a_R^{+}(\nu_{\omega_j}^{II})}\right)|0_R\rangle$$

$$= \prod_j\left(c_j \sum_{m_j=0}^{\infty} e^{-\frac{\pi\omega_j}{a}}\frac{\left(a_R^{+}(\nu_{\omega_j}^{I})\right)^{m_j}}{\sqrt{m_j!}}\,\frac{\left(a_R^{+}(\nu_{\omega_j}^{II})\right)^{m_j}}{\sqrt{m_j!}}\right)|0_R\rangle$$

PORTANTO

$$\boxed{U|0_M\rangle = \prod_j\left(c_j\sum_{m_j} e^{-\frac{\pi\omega_j m_j}{a}}\,|m_{Rj}^{I}\rangle\otimes|m_{Rj}^{II}\rangle\right)}$$

Logo, como os obs. na região I não têm acesso à região II, podemos tomar o traço parcial em $\mathcal{H}_{II}$ p/ achar a restrição do vácuo de Minkowski à região I.

Assim

$$\mathrm{tr}_{II}\left(U|0_M\rangle\langle 0_M|U^\dagger\right) = \mathrm{tr}_{II}\,\rho_0^M = \prod_j \left(C_j^2 \sum_{n_j} e^{-\frac{2\pi n_j \omega_j}{a}} |n_j\rangle\langle n_j| \right)$$

$$e^{-\frac{2\pi n_j \omega_j}{a}} \sim e^{-\beta n_j \omega_j}$$

com $\boxed{T = \frac{a}{2\pi} = \beta^{-1}}$

Estado térmico à temp. $T_U = \frac{a}{2\pi}$

$\left(k_B T_U = \frac{\hbar a}{2\pi c} \right)$

<u>Observação</u>: <u>Traço parcial</u>

Tome um sistema descrito por $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

Assim $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

$$|\psi\rangle = \sum_{n,m} \psi_{nm} |e_n\rangle_1 \otimes |f_m\rangle_2$$

$\{|e_n\rangle_1\}$ B.O de $\mathcal{H}_1$

$\{|f_m\rangle_2\}$ B.O. $\mathcal{H}_2$

Suponha que só temos acesso ao sist. 1

Logo, só podemos medir observáveis $A \otimes I_2$

Assim

$$\langle\psi|A\otimes I|\psi\rangle = \sum_{\substack{n,n' \\ m,m'}} \langle e_{n'}, f_{m'}|A\otimes I|e_n, f_m\rangle \bar{\psi}_{n'm'} \psi_{nm}$$

$$ {}_{12}\langle \psi | A\otimes I_2 | \psi \rangle_{12} = \sum_{\substack{n,n' \\ m,m'}} \overline{\psi}_{mn}\, \psi_{m'n'} \langle e_m, f_n | A\otimes I | e_{m'}, f_{n'} \rangle_{AB} $$

$$ = \sum_{\substack{n,n' \\ m,m'}} \overline{\psi}_{mn}\, \psi_{m'n'}\; {}_1\langle e_m | A | e_{m'} \rangle_1 \; \overbrace{{}_2\langle f_n | f_{n'} \rangle_2}^{\delta_{nn'}} $$

$$ = \sum_{m,m'} \left(\sum_n \overline{\psi}_{mn}\, \psi_{m'n} \right) {}_1\langle e_m | A | e_{m'} \rangle_1 $$

$$ = \sum_k \left(\sum_{m,m'} d_{m'm}\; {}_1\langle e_m | A | e_k \rangle_1 \right) {}_1\langle e_k | e_{m'} \rangle $$

Assim

$$ \langle \psi | A\otimes I_2 | \psi \rangle = \sum_k \langle e_k | \overbrace{\sum_{m,m'} d_{m'm} | e_{m'} \rangle \langle e_m |}^{=\rho^{(1)}} A | e_k \rangle $$

$$ = \mathrm{Tr}_1 \big(\underset{\text{op. em } H_1}{\rho^{(1)}} \overset{\text{OBS. em } H_1}{A} \big) $$

DEFINIÇÃO

$$ \mathrm{Tr}_2 |\psi\rangle\langle\psi| = \sum_k {}_2\langle f_k | \psi \rangle \langle \psi | f_k \rangle_2 $$

$$ = \sum_{\substack{n,n' \\ m,m'}} \overline{\psi}_{mn}\, \psi_{m'n'}\; {}_2\langle f_k | e_m, f_n \rangle \langle e_{m'}, f_{n'} | f_k \rangle $$

$$ = \sum_k \sum_{\substack{n,n' \\ m,m'}} \underbrace{\overline{\psi}_{mn}\, \psi_{m'n'}}_{d_{mm'}} | e_m \rangle_1 {}_1\langle e_{m'} | \; \overbrace{{}_2\langle f_k | f_n \rangle}^{\delta_{kn}} \overbrace{\langle f_{n'} | f_k \rangle}^{\delta_{kn'}} $$

$$ = \sum_{m,m'} \left(\sum_k \overline{\psi}_{mk}\, \psi_{m'k} \right) | e_m \rangle_1 {}_1\langle e_{m'} | = \rho^{(1)} $$

sub.
Assim todos os obs. associados ao sistema (1) podem ser obtidos conhecendo a chamada matriz densidade reduzida:

$$\boxed{\rho^{(1)} = tr_2 |\psi\rangle\langle\psi|_{12}}$$

$$\boxed{\langle\psi| A \otimes I_2 |\psi\rangle = tr_1 (\rho^{(1)} A)}$$

Apêndice D

Demonstração da Equação (5.15)

Seja (M, g_{ab}) um espaço-tempo globalmente hiperbólico e temporalmente orientável. Sejam $\phi \in C^\infty(M)$ uma solução qualquer da equação (5.1) e $f \in C_0^\infty(M)$, com Ef sendo sua respectiva solução da equação de Klein-Gordon. Então temos

$$\int_M \phi f \sqrt{-g} d^4x = \Omega(Ef, \phi) \equiv \int_\Sigma (\phi \nabla_a Ef - Ef \nabla_a \phi) n^a \sqrt{h} d^3x$$

onde Σ é uma superfície de Cauchy, n^a é a normal à Σ, h_{ab} é a métrica induzida por g_{ab} em Σ, $C_0^\infty(M)$ é o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em M e

$$Ef = \int d^4x' \sqrt{-g(x')} [G^{\text{adv}}(x, x') - G^{\text{ret}}(x, x')] f(x'), \tag{D.1}$$

com G^{adv} e G^{ret} sendo as funções de Green avançada e retardada, respectivamente [124].

Demonstração. Tomemos uma superfície de Cauchy Σ que fica contida fora do futuro causal do suporte de f, ou seja $\Sigma \subset M - J^+(\text{suppf})$. Defina

$$\lambda = \int_M G^{\text{adv}}(x, x') f(x') \sqrt{-g'} d^4x'. \tag{D.2}$$

Com isso, usando as propriedades de G^{adv} [124], $(\nabla^a \nabla_a - m^2)\lambda = f$ e $\text{supp}\lambda \subset J^-(\text{supp}f)$. Então temos

$$\begin{aligned}
\int_M \phi f \sqrt{-g} d^4x &= \int_{J^+(\Sigma)} \phi f \sqrt{-g} d^4x = \int_{J^+(\Sigma)} \phi (\nabla^a \nabla_a - m^2) \lambda \sqrt{-g} d^4x \\
&= \int_{J^+(\Sigma)} \nabla^a (\phi \nabla_a \lambda - \lambda \nabla_a \phi) \sqrt{-g} d^4x + \int_{J^+(\Sigma)} \lambda (\nabla^a \nabla_a - m^2) \phi \sqrt{-g} d^4x \\
&= \int_\Sigma (\phi \nabla_a \lambda - \lambda \nabla_a \phi) n^a \sqrt{h} d\mathbf{x},
\end{aligned} \tag{D.3}$$

onde na última passagem usamos o teorema de Gauss no primeiro termo e que ϕ é solução da equação de Klein-Gordon no segundo termo. Usando a equação (D.1), vemos que $Ef|_\Sigma = \lambda|_\Sigma$ e portanto

$$\int_M \phi f \sqrt{-g} d^4x = \Omega(Ef, \phi) \equiv \int_\Sigma (\phi \nabla_a Ef - Ef \nabla_a \phi) n^a \sqrt{h} d^3x. \tag{D.4}$$

□