Aula I: Por Quê Cordas?

A. Divergências

Qual é a energia dum elétron estacionário?

$$\text{Energia} = m_E c^2 + \text{Energia do campo elétrico}$$

$$= m_E c^2 + 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 \frac{|\vec{E}|^2}{4\pi}$$

(convenções: $c=1$)

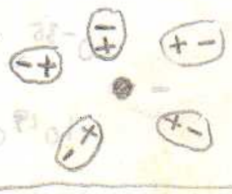
$$= m_E c^2 + e^2 \int_0^\infty dr \frac{1}{r^2} = m_E c^2 - \frac{e^2}{r}\Big]_0^\infty = \infty$$

Mas se pode medir a energia numa experiencia!

Resolução: Elétron tem um "raio efetivo" r_E

$$\text{Energia} = m_E c^2 - \frac{e^2}{r}\Big]_{r_E}^\infty = m_E c^2 + \frac{e^2}{r_E}.$$

Fonte deste "raio" é a fenómena de "screening" da vacua que cria dipolos.



"Renormalização da messa"

Mas também tem energia do campo gravitacional.

$$\text{Energia} = m_E c^2 + \frac{e^2}{r_E} + \text{"} \int_0^\infty dr\, r^2 \left|\frac{m_E G}{r^2}\right|^2 \text{"}$$

$$= m_E c^2 + \frac{e^2}{r_E} - \frac{m_E^2 G^2}{r}\Big]_0^\infty = \infty$$

Não tem screening porque massa é sempre positiva (gravitacão sempre atrae).

$\Rightarrow$ Renormalização não funciona para gravitação

B. Explicação mais formal

Ação para eletromagnetismo com fonte de um elétron:

$$S = \int d^4x \left(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + e A_\mu \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi + \bar{\Psi} (\not{\partial} - m_E^0) \Psi \right)$$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

$$m_E^R = \frac{\partial}{\partial \bar{\Psi}} \frac{\partial}{\partial \Psi} S$$

m_E^0 = massa nua

$$= m_E^0 + e^2 \int_0^\Lambda d^4p \frac{k}{(p-k)^2 (p+k)^2} + e^4 \int_0^\Lambda d^4p \int_0^\Lambda d^4q \frac{k}{p^4 q^4} + \dots$$

$\Rightarrow$ Divergência $\sim \log(\Lambda)$ para qualquer $L \Rightarrow$ renormalizável

---

Ação para gravitação com fonte de um elétron:

$$S = \frac{1}{G} \int d^4x \sqrt{g} \left(R + \bar{\Psi} (\not{D} - m) \Psi \right)$$

$$\Psi \to \sqrt{G}\, \Psi$$

Para fazer teoria de perturbação, expande $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \sqrt{G}\, h_{\mu\nu}$

$$S = \int d^4x \left[h_{\mu\nu} (\partial_\delta \partial^\delta \eta^{\mu\kappa} \eta^{\nu\rho} + \eta^{\mu\kappa} \partial^\nu \partial^\rho + \dots) h_{\kappa\rho} + \bar{\Psi} (\not{\partial} - m_E^0) \Psi \right.$$
$$\left. + \sqrt{G} \left(h_{\mu\nu} \partial^\rho h^{\mu\kappa} \partial^\nu h_{\rho\kappa} + \dots \right) + \sqrt{G}\, h_{\mu\nu} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial^\nu \Psi + \dots \right]$$

$m_E^R =$ 

$$= m_E^0 + G \int_0^\Lambda d^4p \frac{k p^2}{p^4} + G^2 \int_0^\Lambda d^4p \int_0^\Lambda d^4q \frac{k p^4}{p^4 q^4} + \dots$$

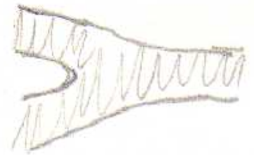
$$= m_E^0 + G \Lambda^2 a + G^2 \Lambda^4 b \Rightarrow \text{Divergencia} \sim \Lambda^{2L}$$

$\Rightarrow$ Não-renormalizável

C. Cordas

As divergências podem ser entendidas como singularidades quando duas partículas se aproximam ($\Lambda \to \infty$). Se partículas não são puntuais, este problema não existe. Mas, neste caso, normalmente tem problema de violação de causalidade (e.g. objeto rígido). Corda (objetos livres 1-dimensionais) evitam esta violação.

Partículas interagindo. Ponto de interação é singular.



Cordas interagindo. Não tem ponto de interação singular. Inv. Lorentz significa ausência de operador no ponto de interação.

Diagrama de Feynmann

Superfície com fronteiras

Se pode calcular amp. de espalhamento de cordas

Cada resonância da corda é uma partícula (fóton, graviton, partículas massivas, ...)

D. Supercordas

Existe uma versão "supersimétrica" da corda cujas partículas incluem bósons e férmions. Esta "supercorda" descreve uma teoria finita de gravidade quântica (mais outras partículas). As partículas não-massivas são de "supergravidade" em $D=10$. Existem "dualidades" nas amplitudes de espalhamento da supercorda que relacionam fraco e forte acoplamento.

Para comparar com experiências, temos que entender melhor como as 10 dimensões são "compactificadas" para $D=4$. Se pode testar isso com experiências de gravitacão para distâncias pequenas

Aulas

Terca: Partículas → Cordas

Quarta: Amp. de Espalhamento de Cordas

Quinta: Partículas com spin → Supercordas

Sexta: Propriedades de supercordas

Aula 2: Partícula → Corda

A. Partícula

Para entender como as resonâncias da corda descrevem partículas diferentes, é útil revisar a quantização de uma partícula relativística de massa M

$$S = M\ell = M\int d\tau \sqrt{\frac{\partial}{\partial\tau}x^\mu \frac{\partial}{\partial\tau}x_\mu}$$

Eq. de mov: $\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial L}{\partial(\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau})}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{M\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}}{\sqrt{\frac{\partial}{\partial\tau}x^\mu \cdot \frac{\partial}{\partial\tau}x_\mu}}\right) = 0.$

Acão tem inv. de reparametrização de $\tau \to \tau'(\tau)$ porque

$$\int d\tau' \sqrt{\frac{\partial x}{\partial\tau'}\cdot\frac{\partial x}{\partial\tau'}} = \int d\tau\left(\frac{d\tau'}{d\tau}\right)\sqrt{\frac{\partial x}{\partial\tau}\left(\frac{\partial\tau}{\partial\tau'}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial\tau'}} = \int d\tau\sqrt{\frac{\partial x}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial x}{\partial\tau}}$$

⇒ Se pode definir τ duma maneira que $\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau} = 1.$

Neste gauge, a eq. de mov. simplifica a $M\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial\tau^2} = 0.$

Para quantizar, define $P_\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_\tau x^\mu)} = \frac{M}{\sqrt{\frac{\partial x}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial x}{\partial\tau}}}\frac{\partial}{\partial\tau}x^\mu = M\frac{\partial}{\partial\tau}x^\mu.$

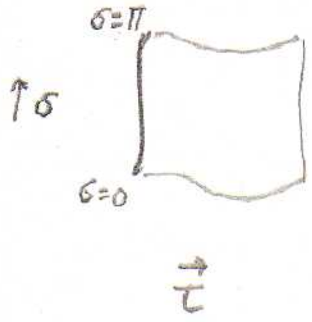
Todos os componentes de P_μ não são independentes porque $P_\mu P^\mu = M^2\frac{\partial}{\partial\tau}x^\mu\frac{\partial}{\partial\tau}x_\mu = M^2$

⇒ Função de onda $\Psi(x)$ tem que satisfazer o vínculo $0 = (P_\mu P^\mu - M^2)\Psi(x) = \left(-\frac{\partial}{\partial x^\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} - M^2\right)\Psi(x)$

$$\Rightarrow \Psi(x) = \int d^3k_j\, e^{i(k_0 x^0 + k_j x^j)} f(k_j)$$

onde $k_0^2 = M^2 + k_j^2.$

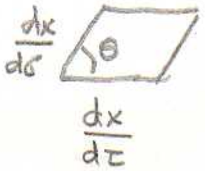
B. Corda Aberta



$X^\mu(\tau,\sigma)$ onde σ parametrize a corda

Livre $\Rightarrow$ $\dfrac{\partial X^\mu}{\partial\sigma}=0$ quando $\sigma=0$ ou $\sigma=\pi$.

$$\mathcal{S}=\underset{\substack{\uparrow \\ \text{tensão}}}{T}\;\underset{\substack{\uparrow \\ \text{área}}}{a}=T\int d\tau\, d\sigma\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial x}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)-\left(\frac{\partial x}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)^2}$$



$$\Rightarrow A=\left|\frac{dx}{d\sigma}\right|\left|\frac{dx}{d\tau}\right|\sin\theta$$
$$=\left|\frac{dx}{d\sigma}\right|\left|\frac{dx}{d\tau}\right|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

Mas $\left|\dfrac{dx}{d\sigma}\right|\left|\dfrac{dx}{d\tau}\right|\cos\theta=\dfrac{dx}{d\sigma}\cdot\dfrac{dx}{d\tau}\Rightarrow\mathcal{S}$

Eq. de mov: $\dfrac{\partial}{\partial\tau}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}}\right)+\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\left(\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\frac{\partial x^\mu}{\partial\sigma}}\right)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\mu}$

$$\Rightarrow 0=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\frac{\partial x}{\partial\tau}\left(\frac{\partial x}{\partial\sigma}\cdot\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)-\frac{\partial x}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial x}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)}{\sqrt{}}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\frac{\partial x}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial x}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial x}{\partial\tau}\right)-\frac{\partial x}{\partial\tau}\left(\frac{\partial x}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial x}{\partial\sigma}\right)}{\sqrt{}}\right).$$

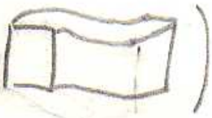
Acão tem inv. de reparametrizacão de $(\tau,\sigma)\to(\tau',\sigma')$

$\to$ Se pode definir (τ,σ) duma maneira que

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\tau}=-\frac{dx^\mu}{d\sigma}\frac{dx_\mu}{d\sigma}\quad\text{e}\quad\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx_\mu}{d\sigma}=0.$$

Neste gauge, a eq. de mov. é $\dfrac{d^2x^\mu}{d\tau^2}-\dfrac{d^2x^\mu}{d\sigma^2}=0$

$$\Rightarrow X^\mu(\tau,\sigma)=f^\mu(\tau+\sigma)+\bar{f}^\mu(\tau-\sigma)$$

Para objetos extendidos de mais que uma dimensão (e.g. membranas ), as eqs. de mov. são muito mais complicadas.

Para quantizar, define $P_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}\right)} = T \frac{\partial x^\mu}{\partial \tau}$

$\Rightarrow P_\mu$ satisfaz $P_\mu P^\mu = -T^2 \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}\frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma}$ e $P_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma} = 0$

$\Rightarrow$ Funcão da onda $\psi^\mu(x)$ tem que satisfazer os vinculos $\left(P_\mu P^\mu + T^2 \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}\frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma}\right)\psi = P_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}\psi = 0$

Note que $M^2 = P_\mu P^\mu = T^2 \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}\frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma}$ depende da maneira que a corda está vibrando.
Classicamente, a corda pode ter qualquer massa.
Mas depois de quantização, o espectro de massas vai ser discreto.

---

c. Quantização

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2}\right) x^\mu = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \sigma} X^\mu = 0 \text{ quando } \sigma = 0,\ \sigma = \pi.$$

$$\Rightarrow x^\mu(z,\bar z) = x_0^\mu + \frac{p_0^\mu}{T}\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left[a_n^\mu\left(e^{in(\tau+\sigma)} + e^{in(\tau-\sigma)}\right) + a_{-n}^{\dagger\mu}\left(e^{-in(\tau+\sigma)} + e^{-in(\tau-\sigma)}\right)\right].$$

$$[P_\mu(\sigma), x^\nu(\sigma')] = i\delta_\mu^\nu\,\delta(\sigma-\sigma') \Rightarrow [p_0^\mu, x_0^\nu] = i\eta^{\mu\nu}$$

$$[a_n^\mu, a_m^{\dagger\nu}] = i\delta_{m+n}\eta^{\mu\nu}\frac{n}{T}.$$

Funcão de onda $\Psi(x_0^\mu, a_{+1}^\mu, a_{+2}^\mu, \ldots)$

$$= \left(\prod_{\mu=0}^{D-1}\prod_{n=1}^{\infty}(a_{+n}^\mu)^{\alpha_n^\mu}\right)\psi(x_0^\mu)$$

Para determinar o espectro, analize

$$\left(P_\mu P^\mu + T^2 \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}\frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)\Psi = 0$$

$$\Rightarrow \left(-T^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^\mu a_{-n\mu} + a_{-n}^\mu a_{n\mu}\right) + p_0^\mu p_{0\mu}\right)\Psi = 0$$

$$\Rightarrow \left(-T^2 \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^\mu\left(\frac{n}{T}\frac{\partial}{\partial a_n^\mu}\right) + \left(\frac{n}{T}\frac{\partial}{\partial a_n^\mu}\right)a_{n\mu}\right) + p_0^\mu p_{0\mu}\right)\Psi = 0$$

$$\Rightarrow \left(-\sum_{n=1}^{\infty}\left(2nT a_n^\mu \frac{\partial}{\partial a_n^\mu} - (D-2)nT\right) + p_0^\mu p_{0\mu}\right)\Psi = 0$$

-2 vem de fantasmas de fixação de gauge

$$\Rightarrow M^2 = p_0^\mu p_{0\mu} = T\left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{D-1} 2n\alpha_n^\mu + (D-2)\sum_{n=1}^{\infty} n\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = \lim_{s\to -1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} = -\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow M^2 = T\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{D-1} 2n\alpha_n^\mu - \frac{D-2}{12}T$$

Espectro:

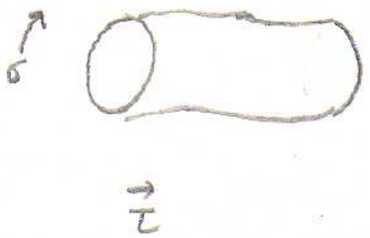
$M^2 = -\frac{D-2}{12}T$	$\lvert 0\rangle$	escalar
$M^2 = \left(2-\frac{D-2}{12}\right)T$	$a_1^\mu\lvert 0\rangle$	vetor
$M^2 = \left(4-\frac{D-2}{12}\right)T$	$a_1^\mu a_1^\nu\lvert 0\rangle$	tensor
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Para a teoria ser consistente, o vetor tem que ter $M=0$ (como o fóton) $\Rightarrow D=26$.

$\Rightarrow$ Espectro tem taquion (i.e $M^2<0$) $\Rightarrow$ vácuo é instável.
(Resolvido usando supercordas)

O problema de $D=26$ pode ser resolvido introduzindo a corda fechada.

D. Corda Fechada



$X^\mu(\tau,\sigma)$ onde $0 \le \sigma < 2\pi$

Corda aberta pode fechar $| \to C \to O$

$$S = TA \Rightarrow \frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} - \frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} = 0$$

$$\Rightarrow X^\mu = x_0^\mu + \frac{p_0^\mu}{T}\tau + \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n}\Big[a_n^\mu e^{in(\tau+\sigma)} + \tilde{a}_n^\mu e^{in(\tau-\sigma)} + a_{-n}^\mu e^{-in(\tau+\sigma)} + \tilde{a}_{-n}^\mu e^{-in(\tau-\sigma)} \Big]$$

Espectro: $M^2 = T \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{D-1} 2n\left(\alpha_n^\mu + \tilde{\alpha}_n^\mu\right) - \frac{D-2}{6} T$

onde $\Psi = \left(\prod_{\mu=0}^{D-1} \prod_{n=1}^{\infty} \left(a_n^\mu\right)^{\alpha_n^\mu} \left(\tilde{a}_n^\mu\right)^{\tilde{\alpha}_n^\mu} \right) \psi_0(x_0^\mu)$

$\Rightarrow \quad M^2 = -\frac{D-2}{6} T \qquad |0\rangle \qquad$ escalar

$M^2 = \left(4 - \frac{D-2}{6}\right) T \qquad a_1^\mu \tilde{a}_1^\nu |0\rangle \qquad$ tensor

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$D = 26 \Rightarrow$ tensor tem $M = 0$. Decompõe em parte simétrico sem traço, anti-simétrico, e traço:

$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + b_{\mu\nu} + \varphi \eta_{\mu\nu}$. $g_{\mu\nu}$ é o gráviton

$\Rightarrow D = 26$ pode ser compactificada (dinamicamente) para $D = 4$.

Aula 3: Interacões

Até agora, descrevemos ações para partículas e cordas livres (sem interacões).
Tem duas maneiras de descrever interacões:

A. Partícula num background gravitacional e eletromag:

$$S = \frac{M}{2}\int d\tau \, \frac{\partial}{\partial\tau}X^\mu \frac{\partial}{\partial\tau}X_\mu$$ da a mesma eq. de mov

como $S = M\int d\tau \sqrt{\frac{\partial}{\partial\tau}X^\mu \frac{\partial}{\partial\tau}X_\mu}$. Mais fácil incluir interações:

$$S = \int d\tau \left[\frac{M}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{\partial}{\partial\tau}X^\mu \frac{\partial}{\partial\tau}X^\nu + e A_\mu(x) \frac{d}{d\tau}X^\mu\right]$$

Eq. de mov: $\frac{\partial}{\partial\tau}\left(M g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\tau}X^\nu + eA_\mu\right) = \frac{M}{2}(\partial_\mu g_{\rho\sigma})\frac{\partial}{\partial\tau}X^\rho \frac{\partial}{\partial\tau}X^\nu + e\partial_\mu A_\nu \frac{\partial}{\partial\tau}X^\nu$

$$\Rightarrow M g_{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}X^\nu + M\partial_\rho g_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\tau}X^\rho \frac{\partial}{\partial\tau}X^\nu + e\partial_\rho A_\mu \frac{\partial}{\partial\tau}X^\rho$$

$$= \frac{M}{2}(\partial_\mu g_{\rho\sigma})\frac{\partial}{\partial\tau}X^\rho \frac{\partial}{\partial\tau}X^\nu + e\partial_\mu A_\nu \frac{\partial}{\partial\tau}X^\nu$$

$$\Rightarrow M g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}X^\nu + \Gamma^\nu_{\rho\sigma}\frac{\partial}{\partial\tau}X^\rho \frac{\partial}{\partial\tau}X^\sigma\right) = eF_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial\tau}X^\nu$$

= eq. de mov. para partícula de massa M e carga e.

B. Partícula com Partícula (primeira quantizada)

$$S = \frac{M}{2}\int d\tau \, \frac{\partial}{\partial\tau}X^\mu \frac{\partial}{\partial\tau}X_\mu + \lambda S_{\text{INTERAÇÃO}}$$

λ λ^3

Vértices depende do tipo de interação (e.g. φ^3, φ^4, etc)

λ é o constante de acoplamento

B. Corda fechada num background

$$S = T \int d\tau\, d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial\sigma}\right) X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial\sigma}\right) X_\mu$$ da mesma eq. de mov. como $S = T\int d\tau d\sigma \sqrt{}$.

Faça "rotação de Wick" $\tau \to i\tau$ e chame $z = \tau + i\sigma$, $\bar{z} = \tau - i\sigma$:

$$S = T \int dz\, d\bar{z}\; \partial X^\mu\, \bar{\partial} X_\mu$$ onde $\partial = \frac{\partial}{\partial\tau} - i\frac{\partial}{\partial\sigma}$, $\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial\tau} + i\frac{\partial}{\partial\sigma}$

Esta ação e vínculos tem inv. conforme sobre a transf. analítica $z \to z'(z)$, $\bar{z} \to \bar{z}'(\bar{z})$ porque

$$S' = T\int dz'\, d\bar{z}'\; \partial' X^\mu\, \bar{\partial}' X_\mu = T\int dz \left(\frac{dz'}{dz}\right) d\bar{z} \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial z'}\right) \partial X^\mu \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}'}\right) \bar{\partial} X_\mu = S$$

Acopla com background:

$$S = T\int dz\, d\bar{z} \left[g_{\mu\nu}(x)\, \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu + b_{\mu\nu}(x)\, \partial X^\mu \bar{\partial} X^\nu \right] + \int dz\, d\bar{z}\; \varphi(x)\, r$$

onde r é a curvatura da folha-mundo.

$g_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$, φ são os estados não-massivos da corda que criam um background. Classicamente, a ação tem inv. conforme, mas quânticamente somente tem inv. conforme se $(g_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, \varphi)$ satisfazem as equações

$$R_{\mu\nu} - T_{\mu\nu} + \dots = 0, \quad \nabla^\mu H_{\mu\nu\rho} + \dots = 0, \quad \nabla^\mu \nabla_\mu \varphi + \dots = 0$$

onde $R_{\mu\nu}$ é tensor de Ricci, $T_{\mu\nu}$ é stress-tensor, $H_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu} b_{\nu\rho]}$ e ... vem de correções de ordem T^2 (que vem dos estados massivos da corda).

C. Corda com Corda

Estas equações vem de relativ. geral + matéria + correções.

O background vem dos estados de corda

$\Rightarrow$ pode ver calculando espalhamento corda-corda

$$S = T\int dz\, d\bar{z}\, \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + \text{interações}$$

$$= T\int_S dz\, d\bar{z}\, \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu + (\log \lambda)(2g-2+N)$$

onde g = genus (= # de buracos)
N = numero de furos

$\int_S dz\, d\bar{z}\, r = 2g-2+N \Rightarrow \langle \varphi \rangle = \log \lambda$, i.e.

o valor de espera do campo e^φ = "dilaton"

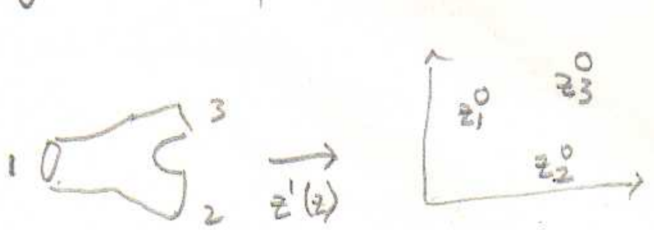
é o constante de acoplamento λ.

$\lambda \qquad\qquad \lambda^3 \qquad\qquad \lambda^5$

Tem que calcular funções de correlação

numa superficie 2-dimensional usando $S = T\int dz\, d\bar{z}\, \partial X^\mu \bar{\partial} X_\mu$.

$g=0$: Faça uma transf. conformal para o plano complexo



$$z' = -2\log(z-z_1) + \log(z-z_2) + \log(z-z_3)$$

No plano complexo, função de Green para $T\partial\bar{\partial} G = \delta^2(y-z)$

é $G(y,z) = \frac{1}{T}\log|y-z|$.

Cada estado da corda é representizado por um "operador de vértice", e.g.

táquion: $V = e^{ik^\mu x_\mu}$ onde $k^\mu k_\mu = -4T$

vetor: $V = \zeta^\mu \partial X_\mu e^{ik^\nu x_\nu}$ onde ζ^μ é a polarização
(corda aberta) e $k^\mu k_\mu = 0$

graviton: $V = \zeta^{\mu\nu} \partial X_\mu \bar{\partial} X_\nu e^{ik^\rho x_\rho}$ onde $\zeta^{\mu\nu}$ é a polarização.

Amplitude de espalhamento para N cordas é dado por

$$\mathcal{A} = \sum_{g=0}^{\infty} \lambda^{2g-2+N} \int dS_{g,N} \langle V_1(z_1) \ldots V_N(z_N) \rangle$$

onde $\langle V_1(z_1) \ldots V_N(z_N) \rangle = \int \mathcal{D}X \, e^{S(x)} V_1(z_1) \ldots V_N(z_N)$.

Por exemplo, N táquions com $g=0$ tem amp. de espalhamento $\mathcal{A} = \int dz_1 \ldots \int dz_N \prod_{r,s} |z_r - z_s|^{\frac{1}{T} k_r^\mu k_{s\mu}}$.

Se pode usar estas fórmulas para calcular amp. de espalhamento de grávitons. Por causa dos problemas de táquion (e dilaton), as amplitudes tem divergências

$\Rightarrow$ precisa estudar a supercorda

Aula 4: Supersimetria

Tem dois tipos de supersimetria:

1) SUSY da linha-mundo ou folha-mundo (partícula com spin $\frac{1}{2}$, supercorda)

2) SUSY do espaço-tempo (super-Yang-Mills, supergravidade, supercorda)

A. Partícula com spin $\frac{1}{2}$

Como escrever a ação para um eletron (spin $\frac{1}{2}$)?

Variáveis são X^μ e W^μ onde, na referencial de descanso, $W^0 = 0$ e W^j = direção do spin. $\vec{S}$ X^μ

W^μ = "vetor de Pauli-Lubanski".

$$W^\mu = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\left(\frac{\partial}{\partial\tau}X_\nu\right)S_{\rho\sigma} \quad \text{onde} \quad M^{\mu\nu} = \underbrace{L^{\mu\nu}}_{\text{mom. ang orbital}} + \underbrace{S^{\mu\nu}}_{\text{mom. ang. spin}}.$$

Ação: $S = \frac{M}{2}\int d\tau\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial X_\mu}{\partial\tau} + 2i\psi^\mu\frac{\partial}{\partial\tau}\psi_\mu\right)$ onde

$\psi^\mu(\tau)$ é grassmaniana (i.e. anti-comutante)

e $M^{\mu\nu} = \frac{1}{2}M\left(X^\mu\frac{\partial}{\partial\tau}X^\nu - X^\nu\frac{\partial}{\partial\tau}X^\mu + 2i\psi^\mu\psi^\nu\right)$, i.e. $S^{\mu\nu} = M\psi^\mu\psi^\nu$.

Quantização: $\left[X^\mu, \frac{\partial}{\partial\tau}X^\nu\right] = i\frac{\hbar}{M}\eta^{\mu\nu}$, $\{\psi^\mu, \psi^\nu\} = \frac{\hbar}{M}\eta^{\mu\nu}$

$W^\mu W_\mu = \frac{1}{2}S^{ij}S_{ij} = \frac{M^2}{2}(\psi^i\psi^j)(\psi_i\psi_j) = \cancel{\frac{1}{2}(\psi^\mu\psi_\mu)(\psi^\nu\psi_\nu)} = -\frac{3\hbar}{4}$

$\Rightarrow$ spin $\frac{1}{2}$

Eq. de mov: $\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}X^\mu = \frac{\partial}{\partial\tau}\psi^\mu = 0$

Ação inv. sobre $\quad X^\mu \to X^\mu + i\epsilon\psi^\mu$ "Supersimetria

ϵq: $\quad \psi^\mu \to \psi^\mu - \frac{\epsilon}{2}\frac{\partial X^\mu}{\partial\tau}$ da linha-mundo"

Note que $\{q, q\} = -2i\frac{\partial}{\partial\tau}$ (i.e $[\epsilon_1 q, \epsilon_2 q] = -2i\epsilon_1\epsilon_2\frac{\partial}{\partial\tau}$) porque

$$x^\mu \to x^\mu + i\epsilon_1\left(\psi^\mu - \epsilon_2\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\right) + i\epsilon_2\psi^\mu - \epsilon_2\left(\psi^\mu - \epsilon_1\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\right) - i\epsilon_1\psi^\mu$$

$$= x^\mu - 2i\epsilon_1\epsilon_2\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}$$

$$\psi^\mu \to \psi^\mu - \epsilon_1\left(\frac{\partial(x^\mu + i\epsilon_2\psi^\mu)}{\partial\tau}\right) - \epsilon_2\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau} + \epsilon_2\left(\frac{\partial(x^\mu + i\epsilon_1\psi^\mu)}{\partial\tau}\right) + \epsilon_1\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}$$

$$= \psi^\mu - 2i\epsilon_1\epsilon_2\frac{\partial\psi^\mu}{\partial\tau}$$

Se pode fazer manifesta a SUSY na ação introduzindo um parametro grassmaniano K para acompanhar τ:

$$S = \frac{M}{2}\int d\tau\int dK\left(i\frac{\partial}{\partial\tau}X^\mu\right)D_K X_\mu$$

$$= \frac{M}{2}\int d\tau\int dK\left[i\frac{\partial}{\partial\tau}(x^\mu + iK\psi^\mu)\left(\frac{\partial}{\partial K} - iK\frac{\partial}{\partial\tau}\right)(x_\mu + iK\psi_\mu)\right]$$

$$= \frac{M}{2}\int d\tau\int dK\left[\left(i\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau} - K\frac{\partial\psi^\mu}{\partial\tau}\right)\left(i\psi_\mu - iK\frac{\partial}{\partial\tau}x_\mu\right)\right]$$

$$= \frac{M}{2}\int d\tau\int dK\left(-\psi_\mu\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau} + K\left[\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x_\mu}{\partial\tau} + i\psi_\mu\frac{\partial\psi^\mu}{\partial\tau}\right]\right)$$

$$= \frac{M}{2}\int d\tau\left(\frac{\partial x^\mu}{\partial\tau}\frac{\partial x_\mu}{\partial\tau} + i\psi^\mu\frac{\partial\psi_\mu}{\partial\tau}\right).$$

É fácil geralizar para partícula com spin $1/2$ propagando em campos externos, e.g.

$$S = \frac{iM}{2}\int d\tau\int dK\Big[g_{\mu\nu}(X)\frac{\partial}{\partial\tau}X^\mu D_K X^\nu + b_{\mu\nu}(X)\frac{\partial}{\partial\tau}X^\mu D_K X^\nu + A_\mu(X)D_K X^\mu\Big]$$

descreve campos gravitacionais, campos de torsão (onde $T_{\mu\nu\rho} = \partial_{[\mu}b_{\nu\rho]}$) e eletromagnéticos.

Estados sem massa: $A^I_\mu(x)$, $\chi^{\alpha I}(x)$ $\quad I = 1$ a $\dim G$

$$S = \int d^D x \, Tr\left[F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\chi} \not{D} \chi \right]$$

"Super-Yang-Mills"

$$\not{D} = \gamma^\mu_{\alpha\beta}(\partial_\mu + A_\mu)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A^I_\nu - \partial_\nu A^I_\mu + f^I_{JK} A^J_\mu A^K_\nu$$

$$\not{D}\chi = \gamma^\mu_{\alpha\beta}(\partial_\mu \chi^I + f^I_{JK} A^J \chi^K)$$

Ação inv. sobre $\quad A^I_\mu \to A^I_\mu + \bar{\epsilon}\gamma_\mu \chi^I$

$$\chi^{\alpha I} \to \chi^{\alpha I} + F^I_{\mu\nu}(\gamma^{\mu\nu}\epsilon)^\alpha$$

---

2. Supercorda fechada

$$X^\mu(\tau,\sigma) = X^\mu(\tau,\sigma+2\pi)$$

$$\psi^\mu(\tau,\sigma) = \pm\, \psi^\mu(\tau,\sigma+2\pi)$$

$$\bar{\psi}^\mu(\tau,\sigma) = \pm\, \bar{\psi}^\mu(\tau,\sigma+2\pi)$$

R-R ($+\,+$) ; $\psi^\mu = \sum_{n\neq 0} e^{in(\tau+\sigma)} d_n + d_0$

$$\bar{\psi}^\mu = \sum_{n\neq 0} e^{in(\tau-\sigma)} \bar{d}_n + \bar{d}_0$$

R-NS ($+\,-$) ;

NS-R ($-\,+$) ;

NS-NS ($-\,-$) ;

Estados sem massa

$A_{\alpha\beta}$	$A_\alpha{}^\beta$
χ_α	χ_α
$\bar{\chi}_\alpha$	$\bar{\chi}^\alpha$
$g_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$, φ	$g_{\mu\nu}$, $b_{\mu\nu}$, φ
IIB sugra	IIA sugra

Supergravidade

B. Generalização para a supercorda

$$S = T\int dz\,d\bar{z}\,\left(\partial X^\mu \bar\partial X_\mu + i\psi^\mu \bar\partial \psi_\mu + i\bar\psi^\mu \partial \bar\psi_\mu + \cancel{F_\mu F^\mu}\right)$$

$\Rightarrow$ eq. de mov: $\partial\bar\partial X^\mu = \bar\partial\psi^\mu = \partial\bar\psi^\mu = \cancel{F^\mu} = 0$

$\delta X^\mu = i\epsilon\psi + i\bar\epsilon\bar\psi$
$\delta\psi = i\epsilon \cancel{\partial X}$
$\delta\bar\psi = i\bar\epsilon\bar\partial X$

F^μ não propaga mas é necessario para SUSY manifesta

$$S = T\int dz\,d\bar z \int d\kappa\,d\bar\kappa\; D\mathbb{X}^\mu \bar D \mathbb{X}_\mu$$

$$= T\int dz\,d\bar z\int d\kappa\,d\bar\kappa \left[\left(\frac{\partial}{\partial\kappa} - i\kappa\frac{\partial}{\partial z}\right)(X^\mu + i\kappa\psi^\mu + i\bar\kappa\bar\psi^\mu + i\kappa\bar\kappa F^\mu)\right.$$
$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial\bar\kappa} - i\bar\kappa\frac{\partial}{\partial \bar z}\right)(X^\mu + i\kappa\psi^\mu + i\bar\kappa\bar\psi^\mu + \kappa\bar\kappa F^\mu)\right]$$

$$= T\int dz\,d\bar z\int d\kappa\,d\bar\kappa\,\left(\kappa\bar\kappa\,(\partial X^\mu \bar\partial X_\mu + i\psi^\mu\bar\partial\psi_\mu + i\bar\psi^\mu\partial\bar\psi_\mu + F^\mu F_\mu) + \ldots\right)$$

S inv. sobre
$$X^\mu \to X^\mu + i\epsilon\psi^\mu + i\bar\epsilon\bar\psi^\mu + \epsilon\bar\epsilon F^\mu$$
$$\psi^\mu \to \psi^\mu - \epsilon\frac{\partial X^\mu}{\partial z} - i\bar\epsilon F^\mu$$
$$\bar\psi^\mu \to \bar\psi^\mu - \bar\epsilon\frac{\partial X^\mu}{\partial\bar z} + i\epsilon F^\mu$$
$$F^\mu \to F^\mu + \bar\epsilon\frac{\partial\psi^\mu}{\partial\bar z} - \epsilon\frac{\partial\bar\psi^\mu}{\partial z}$$

$$[\epsilon_1 q + \bar\epsilon_1\bar q,\ \epsilon_2 q + \bar\epsilon_2\bar q] = \epsilon_1\epsilon_1\frac{\partial}{\partial z} + \epsilon_2\bar\epsilon_2\frac{\partial}{\partial\bar z}$$

$\Rightarrow \{q,q\} = \frac{\partial}{\partial z}$ e $\{\bar q,\bar q\} = \frac{\partial}{\partial\bar z}$

Para acoplar com $g_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, \varphi$

$$S = T\int dz\,d\bar z\,d\kappa\,d\bar\kappa\left(g_{\mu\nu}(\mathbb{X})D\mathbb{X}^\mu\bar D\mathbb{X}^\nu + b_{\mu\nu}(\mathbb{X})D\mathbb{X}^\mu\bar D\mathbb{X}^\nu + \frac{1}{T}\varphi(\mathbb{X})\,\mathcal{R}\right)$$

supercurvatura

Inv. superconforme desta ação

$\Rightarrow R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \ldots$, $\nabla^\mu H_{\mu\nu\rho} + \ldots = 0$, $\nabla^\mu\nabla_\mu\varphi + \ldots = 0$

c, Espectro da supercorda

1. Supercorda aberta:

$$\partial_\sigma X^\mu = 0 \quad \text{quando} \quad \sigma = 0 \text{ ou } \pi$$

$$\psi^\mu = \bar{\psi}^\mu \quad \text{quando} \quad \sigma = 0$$

2 escolhas:

$$\psi^\mu = +\bar{\psi}^\mu \quad \text{quando } \sigma=\pi \qquad \text{“Ramond”}$$

$$\psi^\mu = -\bar{\psi}^\mu \quad \text{quando } \sigma=\pi \qquad \text{“Neveu-Schwarz”}$$

Ramond:
$$\psi^\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{in(\tau+\sigma)} d_n^\mu + e^{-in(\tau+\sigma)} d_{-n}^\mu\right) + d_0^\mu$$
$$\bar{\psi}^\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{in(\tau-\sigma)} d_n^\mu + e^{-in(\tau-\sigma)} d_{-n}^\mu\right) + d_0^\mu$$

$\{d_0^\mu, d_0^\nu\} = \eta^{\mu\nu} \Rightarrow d_0^\mu$ atua como matriz γ^μ

→ Partículas são spinores (férmions)

$\|0\rangle^\alpha$	$M^2 = 0$	“gluino”	✓
$a_1^\mu \|0\rangle^\alpha$	$M^2 = 4T$	spin 3/2 massivo	✓
$\vdots$			

Neveu-Schwarz:
$$\psi^\mu = \sum_{n=1/2}^{\infty}\left(e^{in(\tau+\sigma)} b_n^\mu + e^{-in(\tau+\sigma)} b_{-n}^\mu\right)$$

$\|0\rangle$	$M^2 = -2T$	“táquion”	✗
$b_{1/2}^\mu \|0\rangle$	$M^2 = 0$	“gluon”	✓
$a_1^\mu \|0\rangle$	$M^2 = 2T$	massivo	✗

Projeção GSO mata estados NS com número par de b's e estados R com número ímpar de d's

⇒ espectro supersimétrico em espaço-tempo

Aula 5: Propriedades da Supercorda

O espectro de estados não-massivos correspondem a supergravidade IIA ou IIB

IIA: $S^{(10)} = \int d^{10}x \sqrt{g}\Big[e^{2\varphi}\big(R + H_{\mu\nu\rho}H^{\mu\nu\rho} + (\nabla\varphi)^2\big) + \underbrace{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + F_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\mu\nu\rho\sigma}}_{R-R}\Big]$ + férmions

$$A_\alpha{}^\beta \to A^\mu(\gamma_\mu)_\alpha{}^\beta + A^{\mu\nu\rho}(\gamma_{\mu\nu\rho})_\alpha{}^\beta$$

IIB: $S^{(10)} = \int d^{10}x \sqrt{g}\Big[e^{2\varphi}\big(R + H^2 + (\nabla\varphi)^2\big) + \underbrace{(\nabla A)^2 + F_{\mu\nu\rho}F^{\mu\nu\rho} + \text{5-forma auto-dual}}\Big]$ + férmions

$$A^{\alpha\beta} \to A\,\delta^{\alpha\beta} + A^{\mu\nu}\gamma_{\mu\nu}^{\alpha\beta} + A^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_{\mu\nu\rho\sigma}^{\alpha\beta}$$

$$F^{\mu\nu\rho\sigma\delta} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\delta\kappa\sigma\tau\varphi\theta}F_{\kappa\sigma\tau\varphi\theta}$$ "auto-dual"

As duas supercordas são relacionadas depois de compactificar num circulo.

A. Compactificação e Dualidade T

Compactificando num círculo, o graviton $\Rightarrow$ graviton, vetor, scalar "Kaluza-Klein"

$$g_{\mu\nu} \to \begin{cases} g_{mn} & \text{graviton} \\ g_{mi} & \text{vetores} \\ g_{ij} & \text{scalares} \end{cases}$$

$i = 1 \ldots$ #círculos compactificados

Partícula: $e^{ik^i x_i} = e^{ik^i(x_i + 2\pi r_i)}$

$$\Rightarrow k^i = \frac{N}{r_i} \Rightarrow \text{espectro} = k^m k_m + \frac{N^2}{(r_i)^2}$$

Quando $r_i \ll 1$, e energia é baixa, $k^i = N = 0$

$\Rightarrow$ Não vai ver as dimensões compactificadas

Para a corda: $X^i(\sigma) = X^i(\sigma+2\pi) + 2\pi m r^i$
fechada

(a corda faz m voltas sobre o círculo)

$$\Rightarrow \quad X^i = x_0^i + \frac{p^i}{T}\tau + q^i\sigma + \sum a_n^i e^{in(\tau+\sigma)} + \tilde{a}_n^i e^{in(\tau-\sigma)}$$

onde $p^i = \frac{N}{r^i}$, $q^i = m r^i$

$$\Rightarrow \text{Espectro} = p^m p_m + p^i p^i + T^2 q^i q^i$$

$$= p^m p_m + \frac{N^2}{r_i^2} + T^2 m^2 r_i^2$$

$\Rightarrow$ Espectro não muda se troca $r_i \leftrightarrow \frac{1}{r_i T}$ (e $m \leftrightarrow N$)

"dualidade T" de cordas.

Sugere que não tem singularidades no espaço-tempo porque tem raio "mínimo" de $1/\sqrt{T}$.

Para a supercorda, compactificação num número impar de círculos troca IIA e IIB (muda a paridade da supercorda), i.e. IIA num círculo de raio r

= IIB num círculo de raio $1/rT$.

Existem tambem outro tipo de supercordas chamado "heterótica" que é uma mistura da corda bosónica com a supercorda. Tem uma conjetura que todas estas supercordas em $d=10$ vem de uma teoria em $d=11$ chamada "teoria-M".

B. Teoria M

A dimensão máxima para supersimetrizar gravidade (sem ter 2 grávitons) é $d=11$

Supergrav. $D=11$: $S = \int d^{11}x \sqrt{G} \left(R + F_{ABCD} F^{ABCD} \right) +$ férmions

$A, B = 0, \dots, 10$

Campos bosônicos: $G_{AB} \to g_{\mu\nu}$, A_μ, φ

$A_{ABC} \to A_{\mu\nu\rho}$, $B_{\mu\nu}$

depois de compactificar num círculo de raio r, tem os campos de sugra II A

$G_{10\,10} \to \varphi \Rightarrow$ o raio r (que é medido por $G_{10\,10}$) está relacionado com λ (constante de acoplamento da supercorda)

Conjetura: Teoria-M compactificada num círculo de raio r $=$ Supercorda IIA com $\lambda = r^{2/3}$.

Existem varias evidências para esta conjetura.

Conjetura implica que Supercorda IIB com $\lambda = c$ $=$ supercorda IIB com $\lambda = 1/c$

"dualidade forte-fraco"

Prova: Compactifica teoria M em dois círculos com raios r_1, r_2.

Teoria M $\xrightarrow{r_1}$ IIA, $\lambda = r_1^{2/3}$ $\xrightarrow{r_2}$ IIB, $\lambda = r_1^{2/3}$ comp. num $\frac{1}{r_2 T}$

ou

Teoria M $\xrightarrow{r_2}$ IIA, $\lambda = r_2^{2/3}$ $\xrightarrow{r_1}$ IIB, $\lambda = r_2^{2/3}$, comp. $\frac{1}{r_1 T}$

Agora deixa r_1 e $r_2 \to 0$ com $r_1/r_2 = C$ fixo

$\Rightarrow$ IIB, $\lambda = C^{2/3}$ sem comp = IIB, $\lambda = C^{-2/3}$ sem comp.

C. Dualidade - S

Conj. de Montonen-Olive para D=4 N=4 super-Yang-Mills:

$$S = \frac{1}{g^2}\int d^4x \left(F^I_{\mu\nu}F^{\mu\nu I} + \chi^I (\not{D}\chi)^I\right) + \theta \underbrace{\int d^4x\, \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\mu\nu}F^{\rho\sigma}}_{\text{Termo de superfície}}$$

Física inv. sobre $\tau = \theta + \frac{i}{g^2} \leftrightarrow -\frac{1}{\tau}$ $\quad (\theta = 0 \Rightarrow g \leftrightarrow \frac{1}{g})$

gloons $\leftrightarrow$ monopolos

Monopolos são configurações solitónicos que são soluções não-triviais das eq. de mov. clássicas. Por causa de supersimetria, tambem são soluções das eq. de mov. quânticas.

Para a supercorda; estas soluções são representizadas por "D-branas". Os extremos das cordas abertas podem terminar nestas D-branas, i.e.

$X^\mu(\tau, \sigma) = c^\mu(\tau)$, quando $\sigma = 0, \pi$ onde $C^\mu(\tau) \in$ D-brana.

Maldacena: A física de supercorda IIB na presença de N D_3-branas (supercorda comp. em $AdS_5 \times S^5$ com $F_{\mu\nu\rho\sigma\delta} = N$) = super-YM com grupo SU(N)

Relaciona as duas conjeturas